

Kovács Tamás

# Kaotikus jelenségek égi mechanikai rendszerekben

Doktori értekezés

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Fizika Doktori Iskola

Részecskefizika és Csillagászat Program

Doktori Iskola vezető: Dr. Horváth Zsolt egyetemi tanár

Programvezető: Dr. Csikor Ferenc egyetemi tanár

Témavezető: Dr. Érdi Bálint egyetemi tanár

Konzulens: Dr. Tél Tamás egyetemi tanár

**ELTE Csillagászati Tanszék**

Budapest, 2009



# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>6</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>8</b>
<b>1. Bevezetés</b>	<b>9</b>
1.1. Égi mechanika és káosz . . . . .	9
1.2. Dinamikai rendszerek . . . . .	11
1.2.1. A Sitnikov–probléma . . . . .	12
1.3. A kaotikus viselkedés vizsgálata . . . . .	15
1.3.1. Numerikus módszerek . . . . .	16
1.3.2. Leképezések . . . . .	16
1.3.3. Kezdőfeltételekre való érzékenység . . . . .	18
1.4. Fraktálok . . . . .	19
<b>2. Káosz konzervatív rendszerekben</b>	<b>22</b>
2.1. A Hamiltoni dinamika . . . . .	22
2.2. Integrálható rendszerek . . . . .	23
2.3. Integrálható rendszerek perturbációja . . . . .	25
2.3.1. KAM–tétel . . . . .	26
2.3.2. Rezonáns tóruszok maradványai . . . . .	27
2.4. Tranziens káosz . . . . .	31
2.4.1. A fázistérbeli nyereghalmaz . . . . .	31
2.4.2. Kaotikus szórás . . . . .	33
<b>3. A Sitnikov–probléma fázistere</b>	<b>36</b>
3.1. A fázisportrén túl . . . . .	36

3.2. A 3D-s folyam . . . . .	42
3.2.1. Pillanatnyi energiafelületek . . . . .	50
3.3. Kilépési idők . . . . .	53
<b>4. Tranziens káosz az égi mechanikában</b>	<b>61</b>
4.1. Szórási jelenségek . . . . .	61
4.2. A nyereghalmaz és sokaságai . . . . .	66
4.2.1. A „szigetektől” távol . . . . .	72
4.2.2. Geometriai és dinamikai tulajdonságok . . . . .	75
4.3. Ragadósság . . . . .	77
<b>5. Záró gondolatok</b>	<b>82</b>
<b>Függelék</b>	<b>85</b>
<b>A. Fraktáltípusok</b>	<b>85</b>
<b>B. Hatás- és szögváltozók bevezetése</b>	<b>88</b>
<b>C. A Sitnikov–probléma fázisportréi</b>	<b>92</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>95</b>



*„Úgy látom, hogy a tudomány a legfenekeltebb és legerőteljesebb módon tanítja nekünk azt a hatalmas igazságot, amely az Úr akarata előtti teljes önfeladás kényszerének keresztény tanításában fogalmazódik meg. A tényeket vizsgáljuk tehát úgy, mint egy kisgyermek, álljunk készen minden előzetes elképzelésünk feladására, és alázatosan kövessük, akárhova is vezet minket a természet mélysége; hiszen különben semmit sem tanulhatunk.”*

*(Thomas H. Huxley)*

## Előszó

Az utóbbi évtizedek égi mechanikai kutatásaiban egyre nagyobb szerepet kap a kaotikus jelenségek vizsgálata. Mint ismeretes, matematikai modelljeinkben általában olyan egyszerűsítésekkel élünk, hogy a kapott differenciálegyenletek megoldásai analitikus formát öltsenek. Az égi mechanikában jelentkezett először az probléma, hogy a természeti jelenségek egyre pontosabb leírása során, az egyenleteknek nem volt analitikus megoldásuk. Az alkalmazott perturbációs számítási módszerekkel kapott végtelen sorok azonban nem minden esetben voltak konvergensek. Így a bolygómozgás hosszútávú pontos előrejelzésére sem voltak alkalmasak. (Megjegyzendő azonban, hogy néhány tízéves periódusra a mai napig igen jól alkalmazhatók.) A XIX. század végén Henri Poincaré francia matematikus bizonyította be, történetesen az égi mechanika egyik legegyszerűbb rendszeréről, a háromtest-problémáról, hogy az nem integrálható, azaz az egyenleteknek nincs zárt alakú megoldása. Ehhez társult még az a felismerése, hogy egyes kezdőfeltételekhez tartozó megoldások a fázistérben igen „vadul” viselkednek.

Az 1960-as évek közepére már a matematikusok kezében volt a kaotikus mozgás létrejöttének feltétele konzervatív rendszerekben [3],[37]. Ennek fényében ismét feléledhetett az örök kérdés vizsgálata, vajon stabil-e a Naprendszer. Ezzel a káosz és vele együtt új fogalmi rendszere, módszerei, szemlélete kiírthatatlanul betelepedett az égi mechanikába csakúgy, mint a modern természettudomány más területeire. Később pedig nem kímélte a társadalomtudományokat sem.

A XX. század közepén a számítógépek megjelenésével lehetőség nyílt a nem integrálható rendszerek tanulmányozására. Egyre több olyan fizikai problémát vizsgáltak, melyeknél az egyenletek viszonylag egyszerű alakjából, és a rendszert alkotó kevés számú összetevőből nem várt bonyolult viselkedés következett. Kimutatták azt is, hogy ha a problémát egy hajszálnival eltérő kezdeti állapotból újra vizsgálják, merőben eltérő megoldások adódhatnak.

Az égi mechanikai kutatások fontos részét képezi tehát a kis szabadsági fokú nem integrálható rendszerek vizsgálata. A Sitnikov–probléma egy speciális esete a korlátozott háromtest-problémának, ami egy tipikusan kaotikus tulajdonságokat felvonultató rendszer. Ha meg akarjuk érteni a káosz természetrajzát, mindenekelőtt a fázistérben kell jól eligazodnunk. Erre csak akkor nyílik lehetőségünk, ha alacsony szabadsági fokú rendszerekre korlátozzuk magunkat, mivel ebben az esetben látható jól át a fázistér struktúrája.

Különösen érdekes a Sitnikov–probléma abból a szempontból, hogy rengeteg tudományos értekezés témája volt már. Annak ellenére azonban, hogy az egyes fázissíkok részleteit igen pontosan feltérképezték [26] a paraméterek szinte minden értékére, úgy gondolom, hogy a fázistér még mindig tartogat érdekes dolgokat. Ugyanis az időfüggő gerjesztőerő hatására a rendszer fázistérének dimenziója eggyel nő. Ennek a kiterjesztett fázistérnek a feltárása igen izgalmas feladat, nem beszélve arról, hogy a végtelen idejű kaotikus viselkedés és reguláris mozgások által gazdagon átszőtt fázistérben az ember igen jól megismerkedhet a komplex viselkedés minden mozzanatával. Később azután erre építve folytathatja kutatásait bonyolultabb problémákban.

A közelmúlt kutatásai új irányt vettek a véges idejű, tranzien্স jelenségek tanulmányozásával. Kimutatták, hogy nemcsak hogy létezik véges idejű kaotikus viselkedés, hanem az sokkal inkább meghatározója egy dinamikai rendszernek, mint a permanens káosz [49]. Sok kezdőfeltételt használva kimutatható, hogy létezik egy kaotikus nyereghalmaz a fázistérben, ami a véges idejű kaotikus viselkedésért felelős [23]. Ilyen vizsgálatokkal tudomásom szerint égi mechanikai témában behatóbban nem foglalkoztak. Emellett a már jól ismert kvantitatív módszerekkel is összehasonlítható a kaotikus viselkedés két formája. Magyarázat adható az oly sok érdeklődést kiváltó „ragadós” pályákra is, melyek a szórási tartományban lévő trajektóriákat választják el a stabil mozgásoktól [12].

Dolgozatom öt fejezetből áll. Az első, bevezető részben rövid történeti áttekintés után a kaotikus viselkedés vizsgálati módszereit mutatom be, valamint ismertetem a Sitnikov–problémát. A második fejezetben a konzervatív rendszerekben előforduló kaotikus jelenségek elméleti hátterét tárgyalom vázlatosan. A harmadik és negyedik fejezetben saját elért eredményeim kaptak helyet. Először a Sitnikov–probléma kiterjesztett fázistérét mutatom be néhány érdekes új módszer és fázistérbeli jelenség bevezetésével, majd a tranzien্স jelenségek vizsgálatával kívánom bemutatni, hogy égi mechanikai problémák esetén is igen fontos számba venni a véges idejű kaotikus jelenségeket. Ebben a fejezetben kapott helyet a ragadós pályák magyarázata is. Végül az ötödik fejezetben néhány záró gondolatot írtam az eredményekről.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek: Dr. Érdi Bálintnak, aki megismertette velem az égi mechanika szépségét, egyengette utamat e tudományterületen a diplomamunkámtól a cikkeken át egészen jelen dolgozatig. Dr. Tél Tamással folytatott konzultációim során elfogadtam hogy a kaotikus viselkedés a tipikus világunkban. Külön köszönöm, hogy kifinomult látásmódja felfedte előttem, hogy az égi mechanika klasszikus problémájában új és érdekes eredmények mutathatók fel.

A tanszéken dolgozó kollégáim segítségére mindig számíthattam, ezúton köszönöm meg nekik problémáimra adott javaslataikat, gondolkodásra sarkaló vitáikat. Borkovits Tamással és Regály Zsolttal együtt töltött piszkési észlelések szellemi hozadéka is része e munkának. Kiemelt köszönetet érdemelnek szüleim, akik vargabetüimet feltétlen elfogadással igyekeztek követni, megérteni. Dolgozatom születését és kiteljesedését figyelemmel kísérte, javaslataival ellátta Lukács Kata. Köszönöm.

# 1

## Bevezetés

### 1.1. Égi mechanika és káosz

Az égi mozgások előrejelzése már az ókorban is igen fontos tudományos tevékenységnek számított. Az eltelt röpke kétezer év a naptárkészítésre és a fogyatkozások idejének számítására kiforrott módszereket szolgáltatott. A bolygók, illetve égitestek mozgásának hosszútávú „jóslása” azonban az emberiség csillapíthatatlan vágyának mutatkozik. A mai égi mechanika már rég nem arra hivatott, hogy a bolygók helyzetét minél pontosabban megadja 100000 év múlva. Sokkal inkább arra keresi a választ, hogy meg tudjuk-e mondani egyáltalán, milyen konfiguráció és paraméterek esetén lehet stabil egy bolygópálya. Az, hogy miként jutottak el a csillagászok az ilyen és ehhez hasonló kérdésekig, és azok megválaszolásáig, lesz e rövid rész tartalma.

Mint oly sok mindent a fizikában, a bolygók mozgásának dinamikáját is Newton munkássága alapozta meg. A távolság négyzetével fordítottan arányos gravitációs erőtvény – és persze a differenciál- és integrálszámítás – lehetővé tette, hogy az égitestek múlt és jövőbeli mozgását tanulmányozhassuk. Ezzel kapcsolatosan Newton nevéhez fűződik a kéttest-probléma megoldása. Már a kezdet kezdetén világos volt azonban számára, hogy hármas vagy többes rendszert vizsgálva a megoldás nem lesz ilyen egyszerű, mert a központi égitesten kívül az egyes bolygók egymásra is hatnak. Kérdéses volt tehát, hogy valójában miként mozognak az égitestek a Naprendszerben.

Az első figyelemre méltó megoldást Laplace és Lagrange adta a XVIII. század második felében. Az általuk kidolgozott elméletből az következett, hogy a bolygók pályaelemei<sup>1</sup> időben kváziperiodikusan változnak. Laplace számításai a Jupiterre és a Sza-

<sup>1</sup>A mozgásegyenletek megoldása során fellépő integrációs állandókat helyettesíthetjük a pályaelemekkel. A kéttest-problémában a fellépő hat pályaelem valóban állandó. Ezek közül öt geometriai adat, a pálya méretét, alakját, térbeli elhelyezkedését adja meg, a hatodik pedig a mozgás időbeli lefolyásával kapcsolatos.

turnusra igen jó pontossággal visszaadták az akkori megfigyelések eredményeit. Ez is nagyban hozzájárult ahhoz, hogy még szilárdabbá váljék a determinisztikus világtkép az égi mechanikában. A Laplace–Lagrange-elmélet a perturbációs függvény<sup>2</sup> sorfejtését a másodrendű tagokig bezárólag veszi figyelembe, így ilyen értelemben az elmélet lineáris, hiszen a mozgásegyenletbe való visszahelyettesítés után csak elsőrendű tagok maradnak vissza. Az elméletet Leverrier terjesztette ki magasabb rendekre. Ekkor vált világossá az is, hogy a Laplace–Lagrange-elmélet nem pontos tetszőlegesen hosszú időre, ugyanis a megoldást magasabb rendekig figyelembe véve elromlik a sorok konvergenciája. A sorfejtésben megjelenő kis nevezők problémájára Poincaré adott megoldást, ezzel cáfolva annak lehetőségét, hogy a bolygók mozgása pontosan előrejelezhető végtelen ideig érvényes analitikus megoldással.

Poincaré érdeklődése az  $N$ -test probléma iránt igazán gyümölcsöző eredményeket hozott a dinamikai rendszerek elméletében. A korlátozott háromtest-problémában végzett kutatásai egy teljesen új szemléletet adtak mind a matematikusok, mind a fizikusok számára. Háromkötetes nagy munkájában a *Les méthodes nouvelles de la mécanique célestes*-ben<sup>3</sup> páratlan kvalitatív és geometriai szemléletű gondolkodásáról tett tanúbizonyságot, ahogy megfogalmazza sejtését, hogy a fázistérben homoklinikus pontok végtelen hálózatának kell léteznie. (Lásd 2. fejezet)

A Naprendszer, illetve egyéb bolygórendszerek (jelenleg 342 exobolygót ismerünk [1]) stabilitásában fontos szerepet játszanak a periodikus illetve közel-periodikus pályák. A XX. század közepén Kolmogorov, Arnold és Moser munkásságából született meg az a matematikai tétel, mely arra a már Poincaré által feltett kérdésre adja meg a választ, hogy mi történik az eredetileg integrálható (megoldása egzakt analitikus formába önthető) konzervatív rendszerekben lévő kváziperiodikus pályákkal, ha a rendszert gyenge, külső zavaró hatás befolyásolja. Ennek alapján már könnyen megérthető a fázistér azon jellegzetes geometriai struktúrája, melyet az elmúlt század második felében numerikus vizsgálatokkal szemléletesen is alátámasztottak. Ide sorolhatjuk Hénon és Heiles [22] út-törő számítógépes modellezését a galaktikus potenciálról, vagy Contopoulos numerikus eredményeit a periodikus pályákról [7],[8] .

Az elmúlt néhány évtizedben a számítástechnika rohamos fejlődése lehetővé tette az égi mechanikai számítások felgyorsulását (nagy számú kezdőfeltétel vizsgálata, hosszú

<sup>2</sup>Amikor a bolygók Nap körüli keringése során azok egymásra gyakorolt kölcsönös tömegvonzását is figyelembe vesszük, a mozgásegyenletekben egy új tag, a perturbációs függvény is megjelenik. Ez a plusz tag fejezi ki azt, hogy a bolygók amellet, hogy *közvetlenül* egymásra is hatnak, a Nap mozgását befolyásolva, *közvetve* is kifejtik hatásukat egymásra.

<sup>3</sup>Az égi mechanika új módszerei

idejű integrálás, stb.), és az időközben a nemlineáris rendszerek egyre inkább kiteljesedő vizsgálati eszközeinek, fogalomrendszerének beépülését a csillagászatba.

## 1.2. Dinamikai rendszerek

Az inga lengésének, a csövekben áramló víz mozgásának, egy szigeten élő nyulak számának változása vagy éppen a bolygók mozgásának leírása mind-mind példa dinamikai rendszerekre. Ha tehát a körülöttünk lévő világ eseményeit szeretnénk tanulmányozni, melynek során egy adott mennyiség időbeli fejlődésére vagyunk kíváncsiak, akkor lényegében *dinamikai rendszerekkel* kell foglalkoznunk. Valójában egy dinamikai rendszert tekinthetünk a vizsgálandó folyamat időbeli változását leíró matematikai receptnek. Az idő lehet folytonos vagy esetleg diszkrét változó. Példaként, ha az időt folytonos változónak tekintjük (az égi mechanikában mindenképp), a dinamikai rendszert  $2N$  közönséges elsőrendű autonóm<sup>4</sup> differenciálegyenlet írja le

$$\begin{aligned} dx^{(1)}/dt &= F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(2N)}), \\ dx^{(2)}/dt &= F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(2N)}), \\ &\vdots \\ dx^{(2N)}/dt &= F_{2N}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(2N)}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

melyet tömörebben vektoros formában is írhatunk

$$d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]. \tag{1.2}$$

A (1.2) egy dinamikai rendszer, mivel bármilyen kezdeti  $\mathbf{x}(0)$  állapotból az egyenletek megoldásával megadhatjuk a rendszer egy jövőbeli ( $t > 0$ )  $\mathbf{x}(t)$  állapotát. A rendszer mozgása  $2N$  független koordináta követését jelenti, melyek egy  $2N$  dimenziós koordináta-rendszer tengelyein egyértelműen megadhatók. Ez a koordináta-rendszer feszíti ki a probléma fázisterét. A fázistérben a rendszer állapotát megadó  $\mathbf{x}$  pont vándorlása egy *trajektoriát* rajzol ki.

A differenciálegyenletek megoldása adott kezdőfeltételek esetén egyértelmű. Ez azt jelenti, hogy a mozgásnak megfelelő trajektóriák a fázistérben nem metszhetik egymást, mivel ekkor az adott metszéspontból nem egyértelmű megoldás indulna ki. Ezen tulajdonság miatt szokás mondani, hogy az  $\mathbf{F}$  vektor egy *folyamot* definiál a fázistérben<sup>5</sup>.

Azon dinamikai rendszereknél, melyek kaotikus viselkedést mutatnak, célszerű a

<sup>4</sup>Az időt expliciten nem tartalmazza.

<sup>5</sup>A folyadék mozgása során a részecskepályák sem metszhetik egymást.

mozgás tényleges időbeli vizsgálatáról a fázistérbeli struktúra tanulmányozására áttérni, mivel a véletlenszerű folyamatokat az idő-tengelyen ábrázolva nem sok eredményre jutunk. A fázistérben a kaotikus mozgás komplex, ám rendezett formát ölt.

A *Poincaré–Bendixson-tétel* értelmében semmilyen folytonos idejű kétdimenziós<sup>6</sup> rendszer sem lehet kaotikus. Továbbá, ha a dinamika *lineáris* (lásd B. Függelék), tetszőlegesen magas dimenziójú rendszer sem lehet kaotikus. A tapasztalat azt mutatja, hogy a legalább háromdimenziós fázistérű, nemlineáris rendszerekben adott paraméterértékekre általában fellép kaotikus viselkedés. Azt azonban, hogy a paraméterek mely értékeire lesz kaotikus egy rendszer, pusztán az egyenletek alakjából eldönteni nem lehet. Mivel a nemlineáris differenciálegyenleteknek zárt alakú analitikus megoldása nincs, ezért ezt a tulajdonságot csak numerikus eljárások segítségével lehet tanulmányozni.

Ahhoz, hogy a kaotikus viselkedést megértsük, az egyenletek megoldásánál numerikus számításokra lesz szükségünk, valamint otthonosan kell mozognunk a fázistérben, ahol a bonyolult mozgások meghatározott geometriát rajzolnak ki. A fázistérbeli könnyű tájékozódás érdekében kezdetben célszerű egyszerű rendszereket vizsgálni, melyeknél a fázistér alacsony (3–6) dimenziós. A dolgozatban is egy ilyen egyszerű rendszeren követem nyomon az égi mechanika kaotikus jelenségeinek sokszínűségét.

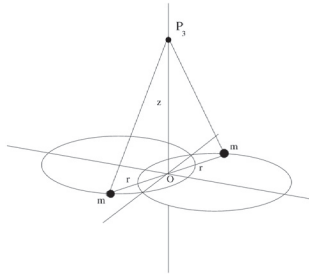
### 1.2.1. A Sitnikov–probléma

A korlátozott háromtest-probléma már az előző részben is említést kapott azon oknál fogva, hogy megoldása sokkal bonyolultabb, mint a kéttest-problémáé. Noha látszólag csekély változtatást alkalmaztunk, mindössze egy elhanyagolható tömegű test hozzáadásával a rendszerhez. Ez a kis „zavar” azonban lehetővé teszi a konzervatív rendszerekben megismert kaotikus viselkedés minden tulajdonságának vizsgálatát ebben az egyszerű, de alapvetően mégis komplex rendszerben.

A Sitnikov-probléma (1.1. ábra) a korlátozott háromtest-probléma egy speciális esete. Adott két egyenlő tömegű égitest (a továbbiakban *főkomponensek*, *kettős*), melyek pusztán a kölcsönös tömegvonzás hatására egymás körül Kepler-pályán keringenek. A rendszer része továbbá egy elhanyagolható tömegű harmadik „égitest” (*teszt részecske*, *próbatest*), mely a kettős keringési síkjára merőleges egyenes mentén – mely egyenes a főkomponensek tömegközéppontján halad át – mozoghat.

<sup>6</sup>Egy szabadsági fokú rendszer.  $N$  szabadsági fokú rendszer esetén a fázistér  $2N$  dimenziós, azaz egy pont  $2N$  független koordinátával adható meg egyértelműen.





**1.1. ábra.** A Sitnikov-probléma térbeli elrendezése. Adott két egyenlő tömegű égitest ( $m$ ). Ezek tömegközéppontján át merőlegesen a keringési síkra mozog egy egyenes mentén a harmadik elhanyagolható tömegű égitest ( $P_3$ ).

A probléma mozgásegyenletei dimenziótlan alakban a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \dot{z} \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Az (1.3) kifejezésben  $z$  a tesztrészecske fősíktól mért távolságát jelenti,  $r(t)$  pedig a főkomponensek tömegközépponttól mért pillanatnyi távolságát. A dimenziótlan egységekben

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - e \cos t) + O(e^2),\tag{1.4}$$

ahol  $e$  a kettős *pályaexcentricitása*. Ez a sorfejtés csak  $e < e_c = 0.6627 \dots$  értékekre konvergens [42]. Mivel bennünket a probléma megoldása nagyobb pályalapultság esetén is érdekel, ezért egy új, független változót vezetünk be, melynek segítségével ilyen korlátokba nem ütközünk. A Kepler-egyenletnek megfelelően bevezetve az excentrikus anomáliát ( $E$ ):

$$\begin{aligned}t &= E - e \sin E \\ \frac{dt}{dE} &= 1 - e \cos E = 2r.\end{aligned}\tag{1.5}$$

(1.5) felhasználásával a mozgásegyenletekre a következőt kapjuk [2]

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dE} &= 2r(E)z' \\ \frac{dz'}{dE} &= -\frac{2r(E)z}{(z^2 + r(E)^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

A számításoknál az egyenletek ezen formáját használva bármely 0 és 1 közti excentricitás-értékre jó megoldást kapunk.

Az egyenes vonalú mozgásból következően a probléma egy szabadsági fokú, fázistere következképpen kétdimenziós  $(z, z')$ . A mozgásegyenletekből kitűnik azonban, hogy ha az excentricitás ( $e$ ) nem nulla, azaz a kettős lapult pályán kering, a mozgást leíró differenciálegyenletek *nem* autonómak. Ekkor az explicit koszinuszos függés felel meg a kettős által a próbatestre gyakorolt külső gerjesztőerőnek. Ez a látszólag csekély módosítás azonban jelentős következményekkel jár; a fázistér dimenziója eggyel nagyobb lesz. Visszaulva a Poincaré–Bendixson-tételre, a rendszer alkalmassá válik, hogy benne kaotikus viselkedés megjelenhessen. Az ilyen rendszerekben általánosan igaz, hogy a fázistér  $(x, \dot{x})$  síkja *nem* azonos a teljes fázistérrel, mert benne az egyes pontokhoz tartozó állapotok nem egyértelműek. Nem mindegy ugyanis, hogy a gerjesztőerő, mely kezdeti értékéhez<sup>7</sup> tartoznak a kezdőfeltételek.

A fentiekből következik tehát, hogy a mozgás egyértelmű jellemzésére szükséges annak megadása is, hogy a  $T$  periódusú gerjesztés éppen milyen „fázisban” van [49]. Ennek érdekében bevezetjük a

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\tag{1.7}$$

gerjesztési fázist, mely definíció szerint szög jellegű, azaz  $2\pi$  periódussal ismétlődő mennyiség. Az  $\Omega = 2\pi/T$  kifejezést a gerjesztés frekvenciájának nevezzük. A gerjesztőerőt az idő függvényeként a fázissal is felírhatjuk – lásd az (1.6) egyenletet. A kezdőállapot egyértelmű megadásához szükséges a kezdőfázis ismerete is. A nemautonóm mozgásegyenlet így átírható *három* elsőrendű differenciálegyenlet autonóm rendszerére a  $\varphi$  fázis bevezetésével. Az (1.6) kifejezéshez hozzájön tehát a

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \equiv \Omega\tag{1.8}$$

egyenlet. [A továbbiakban az excentrikus anomália szerinti differenciálást jelölöm pont-

<sup>7</sup>A Sitnikov-problémában ez a főkomponensek pályamenti kezdeti elhelyezkedésével adható meg.

tal.] Dimenziótlan egységekben  $\Omega$  a Sitnikov-probléma esetén 1. Látható tehát, hogy gerjesztett esetben a fázistér *háromdimenziós*. Ennek a ténynek a következményeit, valamint a fázistér tényleges szerkezetét mutatom be részletesebben dolgozatom 3. fejezetében.

A Sitnikov-probléma egyszerűsége, és égi mechanikai vizsgálatokban betöltött alapvető szerepe miatt nagy történeti múltra tekint vissza. A teljesség igénye nélkül megemlítek néhány olyan jelentős eredményt a témában, melyek hasznomra voltak saját munkám során.

Amennyiben a főkomponensek körpályán keringenek, azaz  $e = 0$ , a probléma integrálható. MacMillan [35] bizonyította, hogy ebben az esetben a megoldás elliptikus integrálok formájában írható fel. Jóval érdekesebb azonban az elliptikus eset, ekkor ugyanis kaotikus viselkedés is megfigyelhető a rendszerben. Először Sitnikov [44] mutatta ki, hogy nem nulla excentricitás értékek mellett léteznek periodikus megoldásai a problémának. Moser [38] szimbolikus dinamikát alkalmazva vizsgálta a kaotikus viselkedést eredményező kezdőfeltételeket. 1990-ben Liu és Sun [33] leképezést vezettek le, mellyel kis excentricitásokon vizsgálták a rendszer viselkedését. Ezután következett a számítógépes korszak. Ekkor született Dvorak [10] numerikus munkája. Ennek alapján később az alacsony rendű rezonanciákra nézve igen részletesen feltérképezték a fázisteret [26]. Eközben az analitikus kutatások is folytatódtak. Wodnar [51] a mozgásegyenlet egy új alakját vezette le, melyben a valódi anomália szerepel független változóként. Perturbációs számítási módszereket alkalmazva az analitikus megoldás közelítéseként Hagel [20] valamint Faruque [16] kis excentricitásokra érvényes formulákat vezetett le. Hagel és Lhotka [21] számítógépes algebrai programok segítségével a közelítő analitikus megoldást az excentricitás magasabb értékeire terjesztette ki. Alfaro és Chiralt [2] a területtartó leképezésekben Birkhoff-normálformák felhasználásával megmutatták, hogy a központi  $(z, \dot{z})$  stabil fixpont bizonyos excentricitás-értékekre instabillá válik. 2006-ban Dvorak [11] a teljes fázisteret vizsgálta átfogóan (az excentricitásra nézve).

Az irodalomból jól ismert fázistér szerkezetet – a fázisportrék a kettős pericentrumátmenetekor készülnek – a C. Függelékben mutatom be részletesebben.

### 1.3. A kaotikus viselkedés vizsgálata

A kaotikus viselkedés tanulmányozása kíván némi szemléletváltást és új fogalmak bevezetését, hiszen a klasszikus mechanika eszköztára nem képes a kaotikusság jellemzésére. Ennek érdekében a fejezet hátralevő részében arra fektetem a hangsúlyt, hogy miképp lehet kvalitatív és kvantitatív módszerekkel felderíteni, hogy a szabályos mozgások a kivételesek, és a kaotikus viselkedés világunk tipikus jellemzője.

### 1.3.1. Numerikus módszerek

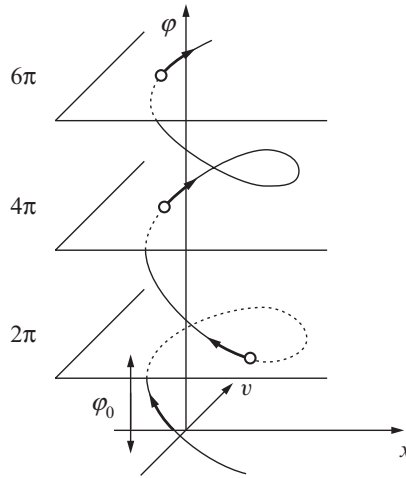
A hagyományos matematikai módszerek általában csődöt mondanak, ha a differenciálegyenlet, melynek a megoldását keressük, az ismeretlen függvénynek valamely a lineáristól különböző alakját (is) tartalmazza. Ekkor az egzakt analitikus megoldás helyett numerikus módszerekkel keressük az eredményt. A számítástechnika fejlődésével egy időben a numerikus matematika is kibontakozott. Lehetővé vált bonyolult egyenletek gépi megoldása sokkal rövidebb idő alatt, mintha azt emberek kézzel számolták volna. Itt nem csak arra gondolok, hogy egy megoldás hosszúidejű követése emésztene fel rengeteg időt, hanem nyilvánvalóan gondot okoz az is, hogy több kezdőfeltételből eredő geometriai alakzatokat szeretnénk vizsgálni a fázistérben.

Munkám során a jól bevált 4-ed rendű Runge–Kutta eljárást alkalmaztam [43] az egyenletek megoldására. Ennek oka egyrészt az, hogy viszonylag egyszerű programozni, másodsor pedig a kívánt határokon belül nagy számítási pontosság érhető el. Nem tartozik a leggyorsabb módszerek közé, de a dolgozatban ismertetett probléma vizsgálatára tökéletesen alkalmas.

### 1.3.2. Leképezések

Általános érvényű a gondolat, hogy azon dinamikai rendszereket, melyekben a mennyiségek véletlenszerűen változnak, a keresett változó időfüggvényének tanulmányozásával nem érdemes vizsgálni. Sokkal inkább ad teljes betekintést a problémába a fázistérbeli viselkedés feltérképezése. Ahhoz persze, hogy a fázistérben kellőképpen eligazodjunk nem árt, ha kis szabadsági fokú rendszereket vizsgálunk először, majd a kapott eredmények fényében magasabb dimenziójú fázisterek feltérképezésébe fogunk.

A háromdimenziós fázistérbeli trajektóriákat célszerű egy síkon, leképezés formájában, diszkrét időben követni. Ez kétféleképpen tehető meg, a probléma jellegétől függően. Gerjesztett mozgások esetében – mint a Sitnikov-probléma is – *stroboszkópikus leképezést* definiálunk. Ez azt jelenti, hogy csak olyan pillanatokban nézünk a rendszerre, amelyek a gerjesztőerő periódusának egész számú többszöröseivel különböznek. Minden egyes ilyen pillanatban rögzítjük a hely- és sebesség-koordinátákat. Ez úgy is tekinthető, mint a térbeli trajektória elmetszése a  $\varphi - \varphi_0 = 2\pi, 4\pi, \dots, 2\pi n, \dots$  síkokkal, ahol  $n$  egész szám (1.2. ábra). Az egymás után következő síkokon lévő pontok között egyértelmű kapcsolat van, mivel mindegyik az adott  $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0$  kezdőfeltételből származó trajektórián van rajta, mely trajektóriát a differenciálegyenlet megoldása adja. A diszkrét koordinátákat



**1.2. ábra.** A háromdimenziós fázistér  $T$  periódusonként történő „lefényképezése” adja a stroboszkópikus leképezés fázisportréit. A kezdeti időpont ( $\varphi_0$  kezdőfázis) változtatása a síkok idő-tengely (fázis-tengely) mentén történő fel-le tologatásának felel meg. Ezáltal a teljes fázistér letapogatható.

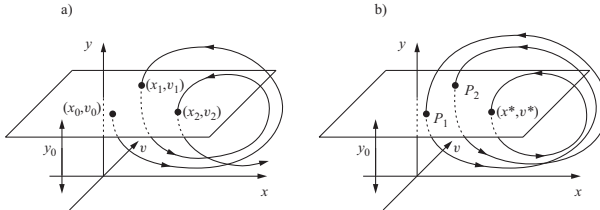
összekapcsoló szabályt nevezzük *leképezésnek*. Az egyes koordinátákban kiírva ez az

$$(x', \dot{x}') = M(x, \dot{x}) \quad (1.9)$$

alak, ahol  $M$  a leképezést megadó függvény,  $(x', \dot{x}')$  pedig az  $(x, \dot{x})$  pont képe. A leképezés lényegében a differenciálegyenlet diszkrét idejű alakja. A stroboszkópikus leképezés időpillanataiban a gerjesztés mindig azonos fázisú, ezért a leképezés alakja már *független* attól, hogy hányadik síkmetszeten alkalmazzuk; a stroboszkópikus leképezés *autonóm*. A leképezésen a mozgást jellemző trajektória nem folytonos vonal, hanem egy pontsorozat. Általánosan is igaz, hogy a leképezésen az egyes alakzatok dimenziója eggyel kisebb, mint a teljes fázistérben. Így tehát például a  $T$  periódussal ismétlődő mozgás a stroboszkópikus leképezésen egyetlen fixpontként tűnik fel. A kettes ciklus képe pedig két egymás között ugráló pont.

A leképezések egy általánosabb és elterjedtebb alakja a *Poincaré-leképezés*. Síkbeli probléma esetén ezt úgy képezzük, hogy a rendszer egy bizonyos konfigurációja esetén az egyik koordinátát (mondjuk  $y$ ) nullának választjuk. Amennyiben a feltétel teljesül,

leolvassuk a pillanatnyi  $(x, \dot{x})$  értékeket. A Poincaré-leképezés annak felel meg, hogy a háromdimenziós fázistérbeli folytonos trajektóriát egy felülettel elmetsszük (1.3. ábra). Emiatt a leképezés síkját szokás Poincaré-metszetnek is mondani.



**1.3. ábra.** Poincaré-metszet definiálása egy konzervatív, nem gerjesztett rendszer háromdimenziós fázissterén. (a) A metszéspontokat nem egy adott periódushoz mérten szabjuk meg, hanem akkor rögzítjük a hely- és sebesség-koordinátákat, mikor a rendszer egy jellegzetes elrendezésbe kerül. Például az  $y = y_0$  értéket vesz fel. (b) A periodikus pályáknak a leképezésen fixpontok felelnek meg  $(x^*, v^*)$ , míg a ciklusoknak egymás után ismétlődő pontsorozatok. Az ábrán a kettes ciklus (az égi mechanikában a rezonancia kifejezés az elterjedtebb) két egymás közt ugráló pontpárja látható.

### 1.3.3. Kezdőfeltételekre való érzékenység

Akkor mondjuk a dinamikára, hogy kaotikus, ha az a kezdőfeltételekre exponenciálisan érzékeny. Mit jelent ez? Tekintsünk két egymáshoz közel eső kezdőfeltételt:  $\mathbf{x}_1(0)$  és  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_1(0) + \xi(0)$ , ezekből a kezdőfeltételekből kiindul két pálya az idő múlásával  $\mathbf{x}_1(t)$  és  $\mathbf{x}_2(t)$ . A két pálya közti távolság  $t$  idő múlva  $\xi(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$ . Abban az esetben, ha a pályák korlátosak és teljesülnek a  $|\xi(0)| \rightarrow 0$ , és  $t \gg 1$  feltételek, valamint a megoldások közti  $|\xi(t)|$  távolság exponenciálisan növekszik  $\xi(0)$  bármilyen irányítottsága mellett (azaz  $|\xi(t)|/|\xi(0)| \sim \exp(ht)$ ,  $h > 0$ ), akkor mondjuk, hogy a rendszer érzékeny a kezdeti feltételekre és kaotikus, [39].

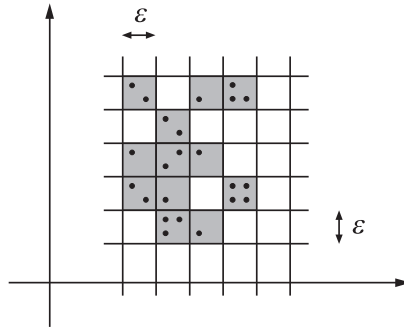
Kvantitatív jellemzést adhatunk a pályák időbeli széttartására a Ljapunov-féle karakterisztikus kitevőkkel ( $\lambda$ ). Reguláris tartományban két egymáshoz közel indított trajektória távolsága a fázis térben lineárisan, míg kaotikus tartományban exponenciálisan nő. A kitevők számításának egy módszerét a 3.1 fejezetben mutatom be.

<sup>8</sup>A síkbeli mozgások fázistere négydimenziós. Azonban az energiamegmaradás miatt a négy változó közül egy (pl.  $y$ ) kifejezhető a másik hárommal. Így a rendszert leíró független elsőrendű differenciálegyenletek száma három.

## 1.4. Fraktálok

A tapasztalat szerint a nagy felületű rendszerek felületéhez nem rendelhető mérőszám, mert a felület alapvetően függ a mérés pontosságától. A felület mérőszáma növekszik a mérési felbontás finomításával, és ez a tulajdonság a finomítás több nagyságrendjén keresztül megfigyelhető. Érdemes tehát bevezetni ezeknél az alakzatoknál a *megfigyelt terület* illetve *kerület* fogalmát. Ehhez tekintsük az  $\epsilon$  élhosszúságú négyzetlapokat, vagy ilyen méretű szakaszokat. A kérdés az, miként függ a terület vagy kerület mérőszáma az  $\epsilon$  felbontástól. A tapasztalat azt mutatja, hogy a megfigyelt terület vagy kerület a felbontás negatív hatványaként nő.

A *fraktáldimenzió* általános definíciójához tekintsünk egy ponthalmazt, melyet a  $d = 1$ -,  $2$ -, vagy  $3$ -dimenziós euklideszi térben (azaz egy vonal mentén, síkon vagy térben) helyeztünk el. Legyen  $N(\epsilon)$  azon  $\epsilon$  lineáris méretű dobozok *minimális* száma, mellyel az alakzatot le lehet fedni (1.4. ábra). Ez a szám a felbontással nyilván nő, a tapasztalat



**1.4. ábra.** Egy alakzat (vagy ponthalmaz) fraktáldimenziójának mérése úgy történik, hogy adott  $\epsilon$  élhosszúságú  $d$  dimenziójú kockákkal lefedjük, majd megszámláljuk, hogy hány kockában (szürke négyzet) találunk pontokat.  $\epsilon$  változtatásával a lefedő dobozok számára hatványtörvény adódik, melynek kitevője éppen a  $D_0$  fraktáldimenziót adja.

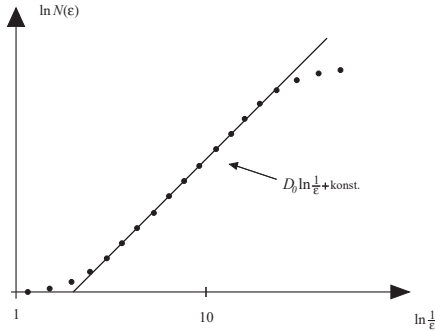
szerint a felbontás negatív hatványaként, de a  $D_0$  kitevő nem feltétlenül egyezik meg a tér  $d$  dimenziójával. Az

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_0}, \text{ ha } \epsilon \ll 1, \quad (1.10)$$

összefüggés definiálja a vizsgált alakzat  $D_0$  fraktáldimenzióját [48],[39]. Átrendezve,

$$D_0 = \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln 1/\epsilon}, \text{ ha } \epsilon \ll 1, \quad (1.11)$$

a fraktáldimenzió tehát leolvasható a lefedő dobozok számának felbontásfüggéséből [50] (lásd 1.5. ábra). Az a tény, hogy az (1.11) kifejezés több nagyságrenden keresztül érvé-



**1.5. ábra.** Ha a lefedő dobozok számát a felbontás reciprokának függvényében logaritmikus skálán ábrázoljuk, az egyenes meredeksége adja a fraktáldimenziót. Kis felbontás esetén még nem várható hatvány viselkedés, hiszen ilyenkor már néhány doboz tartalmazza az egész objektumot. Extrém nagy felbontásnál pedig új effektusok lépnek be, mivel a pontot tartalmazó kockák száma már nem nő tovább. Az említett két jelenség miatt térnek el az adatok az egyenestől.

nyes  $\epsilon$ -ban, arra utal, hogy az alakzatot az ebbe a tartományba eső felbontásokkal megfigyelve, az ugyanolyan szerkezetűnek látszik. Ezt úgy szokták megfogalmazni, hogy a fraktálok *önhasonlók*.

Ha egy fraktál megfigyelt térfogata csökken a felbontással, azaz a fraktáldimenziója ( $D_0$ ) kisebb, mint a tér dimenziója ( $d$ ), akkor az ilyen alakzatokat *sovány fraktáloknak* nevezzük. Az ilyen fraktálok *nem térkitöltőek*, matematikai értelemben *nullmértékű* halmazok. *Nincs térfogatuk*, de van kiterjedésük, sőt végtelen a megfigyelt felületük.

Abban az esetben, ha  $D_0 = d$ , vagyis a tér dimenziója megegyezik a fraktáldimenzióval, ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy a halmaz egy szokványos alakzat vagy test. Annak ellenére, hogy megfigyelt térfogata valamely véges érték, előfordulhat, hogy az alakzat szerkezete alapvetően tagolt. Az ilyen alakzatokat *kövér fraktálnak* nevezzük; ezek egyes részei lyukacsosak, más részei viszont simának tűnnek.

Szólni kell még a fraktálok és a kaotikus jelenségek kapcsolatáról. A természetben



előforduló fraktálok gyakran véletlen elemeket is tartalmaznak. Ilyenek például egy sziget partvonala, a Hold felszíne, a sörhab vagy a fák lombkoronája. A káosszal kapcsolatos fraktálokban az a különös, hogy időbeli viselkedéssel kapcsolatosak, és véletlen elemeket nem tartalmaznak. Az ilyen fraktálok egyértelmű következményei a dinamika kaotikusságának, a mozgásegyenletekből következnek. A kaotikus rendszerekben tehát a *dinamika és a geometria egysége* figyelhető meg. Minél kaotikusabb a mozgás, általában annál bonyolultabb a vele kapcsolatos fraktálszerkezet. A szabályos mozgásokhoz nem fraktálok, hanem a hagyományos geometria körébe tartozó struktúrák társulnak. A kaotikus mozgás fraktálszerkezete rendszerint nem a valódi térben, hanem a fázistéren figyelhető meg.

A tisztánlátás kedvéért a főbb fraktáltípusok szerkesztésének módját, dimenziójának meghatározását, valamint konkrét dinamikai rendszerekben való megjelenésüket az A. Függelékben mutatom be.

# 2

## Káosz konzervatív rendszerekben

A bevezető fejezet után ebben a részben kívánom bemutatni a konzervatív rendszerekben megjelenő káosz kvalitatív tulajdonságait. A dolgozat stílusához – lényegében numerikus számítások – alkalmazkodva próbálok minél kevesebb matematikát használni, de mégis érthetően és szemléletesen bemutatni azokat az alapvető fogalmakat, jelenségeket, amelyek feltétlenül szükségesek a súrlódásmentes rendszerekben kialakuló kaotikus viselkedés megértéséhez. Egyes helyeken azonban utalok a függelék bizonyos részeire, ahova néhány matematikai részletet száműztem.

### 2.1. A Hamiltoni dinamika

A dinamikai rendszerek egy speciális csoportját képezik azok a rendszerek, melyekben a súrlódás elhanyagolható. Ilyen mozgásokra főleg a plazmafizika, hidrodinamika, csillagászat tárgykörében találunk példákat. Konzervatív esetben a mozgást egy bizonyos függvény, a  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  Hamilton-függvény jellemzi. A rendszer egy pillanatnyi állapotát a  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{p}$  általános hely- és az ezekhez kanonikusan konjugált impulzus koordinátákkal tudjuk jellemezni. Mindkét mennyiség egy  $N$ -dimenziós vektor, ahol az  $N$  számot a rendszer szabadsági fokának nevezzük (síkbeli mozgás esetén ez 4,  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ ). A mozgást  $2N$  számú elsőrendű differenciálegyenlet rendszere írja le, ezek a Hamilton-egyenletek, ennek megfelelően feszítik ki a  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{q}$  koordináták a  $2N$ -dimenziós fázisteret:

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}/dt &= -\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)/\partial \mathbf{q}, \\ d\mathbf{q}/dt &= \partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)/\partial \mathbf{p}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Abban a speciális esetben, ha a Hamilton-függvény explicite nem tartalmazza az időt, azaz  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , az egyenletekből következik, hogy a mozgás során  $H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$  értéke

nem változik<sup>1</sup>:

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

A Hamilton-függvény értékét a rendszer összenergiájával azonosítva elmondhatjuk, hogy az időfüggetlen rendszerek energiája megmarad,  $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{állandó}$ . Gerjesztett rendszer esetén a gerjesztési fázis is egy független változó, ekkor a fázistér  $2N + 1$ -dimenziós és a Hamilton-függvény értéke ekkor nem állandó (és nem is egyezik meg az összenergiával).

A konzervatív eset egy másik speciális tulajdonsága, hogy a fázistér fogat összehúzó-dási rátája a kanonikus egyenletekből következően nulla. Ezt a tényt fejezi ki a *Liouville-tétel*. A Hamilton-függvény létezéséből következik tehát a konzervatív viselkedés, még akkor is, ha a rendszer gerjesztett ( $H$  időfüggő), és az energia nem marad meg.

Szólni kell még az úgynevezett *kanonikus transzformációról*, mely során olyan új  $\mathbf{q}'$ ,  $\mathbf{p}'$  változókat vezetünk be, hogy az egyenletek továbbra is kanonikus alakban írhatóak, viszont megoldásuk nagyban egyszerűsödhet. A Hamilton-függvény természetesen más alakú lesz az új változókból. A kanonikus transzformáció megadása az úgynevezett  $S(\mathbf{p}', \mathbf{q}, t)$  generátor-függvénnyel lehetséges, mely általában az új impulzus, a régi koordináta, valamint az idő függvénye.

## 2.2. Integrálható rendszerek

Egy időfüggetlen Hamilton-függvénnyel jellemzett rendszert akkor mondunk *integrálhatónak*, ha éppen annyi független mozgásállandóval rendelkezik, mint amennyi a szabadsági fokok száma. Ez  $N$  darab megkötést jelent a  $2N$  dimenziós fázistérben (ebből az egyik természetesen az energia, mivel ebben az esetben ez a mennyiség nem változik). Az integrálhatóság feltétele, hogy létezzen olyan kanonikus transzformáció, melyet alkalmazva a változókra, az új Hamilton-függvény csak az új impulzusoktól függ, a koordinátáktól nem. Ezeket az új impulzusokat (**J**) *hatásváltozóknak* nevezzük. A hatásváltozók értéke időben nem változik, és megfeleltethetők az  $N$  mozgásállandónak. A hozzájuk tartozó koordináták ( $\Theta$ ) a *szögváltozók*, melyek éppen  $2\pi$  értékkel változnak a régi  $\mathbf{q}$  koordináták egy periódusa alatt. A hatás- és szögváltozók bevezetésének részletesebb matematikai leírását a B. Függelék tartalmazza.

Mivel az új Hamilton-függvény csak a hatásváltozóktól függ, ezért a kanonikus

<sup>1</sup>  $\frac{dH}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0$ .

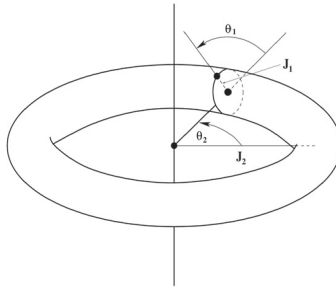
egyenletek a következő alakra egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} d\mathbf{J}/dt &= 0, \\ d\theta/dt &= \partial H'(\mathbf{J})/\partial \mathbf{J} = \omega(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Itt  $H'$  az új Hamilton-függvény. A megoldás egyszerű integrálás útján kapható. Látható, hogy a mozgás az új változókbán

$$\mathbf{J} = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \theta = \omega(\mathbf{J})t + \theta_0, \quad (2.4)$$

ahol  $\theta_0$  állandó. A szögváltozó tehát időben egyenletesen nő a rendszer  $\omega$  frekvenciái szerint. Az egyértelműség kedvéért a  $\theta$  értékeit  $2\pi$  szerint periodikusnak tekintjük. Az  $N$  mozgásállandó következményeként a rendszer független változóinak száma  $N$ -re csökken, így a mozgás a  $2N$ -dimenziós tér  $N$  dimenziós tóruszfelületein megy végbe. A mozgást akkor mondjuk kváziperiodikusnak, ha nem létezik olyan egészből álló vektor  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ , a triviális megoldáson kívül ( $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ ), melyre  $\mathbf{m}\omega = 0$ . Ebben az esetben a trajektóriák sűrűn bejárják a tórusz felületét, egzaktul soha nem térnek vissza a kiindulási pontjukba. A kváziperiodikus esettel ellentétben, periodikus mozgás esetén



**2.1. ábra.** A  $\mathbf{J}, \theta$  változók által meghatározott 2 szabadsági fokú rendszer fázissterében a trajektória egy 2 dimenziós tórusz felületén mozog, melyet a  $J_1$  és  $J_2$  sugarú körök határoznak meg. Ezen a tóruszon a mozgás a  $\theta_1$  és  $\theta_2$  változóknak megfelelő  $\omega_1$  és  $\omega_2$  frekvenciákkal történik.

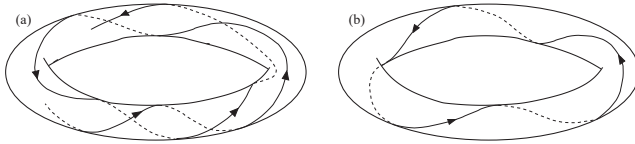
a trajektória záródik a tóruszon. Ekkor érvényes  $\omega = \mathbf{m}\omega_0$ , ahol  $\mathbf{m}$  ismét egy egészeket tartalmazó vektor,  $\omega_0$  pedig skálár. Ebben az esetben a pálya önmagába záródik  $m_1$  kör után  $\theta_1$ -ben,  $m_2$  kör után  $\theta_2$ -ben, és így tovább.

A fent elmondottakat nézzük meg egy két szabadsági fokú integrálható rendszer ese-

tében. A fázis tér 4 dimenziós, azonban létezik két mozgásállandó, tehát a trajektóriák egy kétdimenziós tóruszfelületen futnak (2.1. ábra). Bevezetve az úgynevezett *csavarási számot*

$$R = \omega_1 / \omega_2, \quad (2.5)$$

ahol  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ) a  $\theta_1$ -hez ( $\theta_2$ -höz) tartozó frekvencia. Ha  $R$  irracionális, akkor a mozgás kváziperiodikus (2.2a ábra), ellenkező esetben  $R$  felírható két relatív prím szám hányadosaként, és ekkor a trajektória záródik, a mozgás periodikus (2.2b ábra).



**2.2. ábra.** Két szabadsági fok esetén, ha (a) a frekvenciák aránya irracionális, a trajektória nem záródik, sűrűn bejárja a tórusz felületét. Ekkor a mozgás kváziperiodikus. (b) Ha a frekvenciák aránya racionális, a fázispont visszatér a kiinduló helyzetébe, a mozgás periodikus.

Mivel a (2.3) egyenletek lineárisak (hatás- és szögváltozóknban), a konzervatív rendszerek integrálhatósága azt jelenti, hogy a disszipatív rendszerekkel ellentétben<sup>2</sup> tetszőlegesen magas  $N$  szabadsági fok mellett sem lesz kaotikus a mozgás. Azt azonban, hogy az integrálhatóság nem általános, hanem kivételes tulajdonság ezekben a rendszerekben, a következő alfejezetben fogjuk látni.

### 2.3. Integrálható rendszerek perturbációja

Nézzük meg, mi a következménye, ha egy integrálható rendszerhez kis zavaró hatást adunk. Poincaré ezt a *dinamika allapproblémájaként* fogalmazta meg. Legyen adott az eredeti rendszer  $H_0(\mathbf{J})$  Hamilton-függvénye csupán a hatásváltozók függvényeként. A perturbációról feltesszük, hogy kicsi, ezért a Hamilton-függvényhez adódó járulékát  $\varepsilon H_1$  alakban írjuk, ahol  $\varepsilon$  a perturbáció erősségét kifejező dimenziótlan szám. A perturbált rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{J}) + \varepsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.6)$$

<sup>2</sup>Az  $N$  elsőrendű differenciálegyenlettel leírt disszipatív rendszer általában kaotikus, ha  $N > 2$ .

*Tegyük most fel*, hogy a perturbált rendszer is integrálható! Ekkor létezik egy olyan kanonikus transzformáció, mely a perturbált rendszer Hamilton-függvényét egy új  $H'$ -be viszi át, ami csak az új  $J'$  hatásváltozóktól függ. Itt nem részletezett számítások arra vezetnek, hogy a kanonikus transzformáció alkotófüggvényében fellépő  $\varepsilon$ -ban elsőrendű korrekciós tag *divergál*, ha  $m\omega = 0$ ,  $m$  bizonyos értékeire ( $m$  egészekből álló vektor), azaz ha a perturbálatlan tórusz csavarási száma *racióális*. Ez az úgynevezett *kis nevezők problémája*. Vagyis racionális csavarási számokra, sőt azok környékén is ( $m\omega \ll 1$ ) az integrálhatóság érvényét veszti, ellentmondásra jutottunk ugyanis eredeti feltevésünkben, mi szerint a korrekciók kicsik.

Az elmondottak arra utalnak, hogy a racionális tóruszokon és azok környékén a rendszer viselkedése alapvetően eltér az integrálhatóakétól. Az itt kialakuló kaotikus mozgás *nem írható le analitikus függvényekkel*, ugyanis, ha végtelen hatványsorokat írunk is fel, akkor azok nem konvergálnak. Az 1.1 részben említett Kolmogorov–Arnold–Moser-tétel (KAM-tétel) éppen azt mutatja meg, hogy milyen messzire kell kerülnünk a racionális csavarási számú tóruszoktól, hogy az ilyen sorok konvergálhassanak. Ott azonban a mozgás már szükségszerűen szabályos: kváziperiodikus. A fázistér egészére ez azonban nem jellemző, a legkisebb perturbáció is lerombolja az integrálhatóságot, és kaotikussá teszi a rendszert.

### 2.3.1. KAM-tétel

Láttuk, hogy a tóruszon történő mozgás alapvetően különböző racionális és irracionális csavarási számok esetén. Racionális esetben, amikor a csavarási szám felírható két relatív prím hányadosaként ( $R = p/q$ , a pálya periodikus) a Poincaré- vagy stroboszkópikus leképezésen minden trajektória  $q$  pontból áll, melyek sorrendje függ a  $p$  értékétől. A tóruszon máshonnet indított trajektóriák (más kezdőfeltételből induló mozgások), ugyanilyen pontsorozatot rajzolnak ki. A leképezésen ezek összesége adja ki a zárt görbét<sup>3</sup>.

Irracionális csavarási szám esetén  $R = \omega_1/\omega_2$  (kétdimenziós esetben) nem írható fel  $p/q$  alakban, a mozgás nem tér vissza egzaktul a kiindulási pontba, így már egyetlen kezdőfeltételből induló trajektória is kirajzolja a leképezésen a zárt görbét. A csavarási számok ismeretében beszélhetünk racionális és irracionális tóruszokról. Az irracionális tóruszok szerepe a mozgás szervezésében azon múlik, hogy *mennyire irracionális* a csavarási számuk. (Azt, hogy egy adott szám mennyire irracionális, M. C. Gutzwiller [19] könyvének egy igen érdekes fejezete tárgyalja.)

<sup>3</sup>A leképezéseken a tóruszok metszetei láthatók. Ezért a fázisportrén látható zárt görbéket is nyugodtan nevezhetjük tóruszoknak.

A külső zavaró hatásra adott válaszuk szempontjából a kétfajta tórusz viselkedése alapvetően különböző. A racionális esetben, ahogy azt már láttuk, a pálya záródik a tórusz felszínén, így a perturbáció következményei minden egyes megtett periódusban halmozódnak. Irracionális esetben ezek a hatások mintegy kiátlagolódnak. Velehetjük tehát úgy, hogy a racionális tóruszon valamiféle rezonancia alakul ki, melynek hatására a mozgás minél jobban eltávolodik a perturbálatlan mozgástól. Ez egyre erősödve a tóruszok szétszakadásához, felbomlásához vezet. A racionális tóruszokat ezért *rezonáns* tóruszoknak is nevezzük. A fázistér azon tartományaiban, ahol a tóruszok felbomlottak a mozgás már többé nem lehet kváziperiodikus. Ezek azok a helyek, ahol a káosz kialakul. A tóruszok „túlélését” tehát az határozza meg, hogy elegendően távol vannak-e a tökéletesen periodikus mozgástól.

A tóruszok felbomlásának matematikai feltételét a KAM-tétel fogalmazza meg pontosan. A KAM-tétel szerint elegendően kicsi  $\varepsilon$  külső zavar hatására azok az  $R$  csavarási számú tóruszok maradnak meg, melyekre teljesül az

$$\left| R - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{s^{5/2}} \quad (2.7)$$

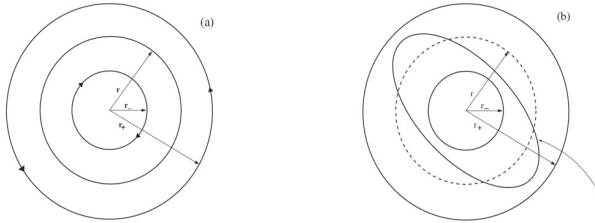
feltétel az eredeti  $R$  csavarási szám bármilyen  $r/s$  közelítésére.  $K$  egy csak  $\varepsilon$ -tól függő szám, mely  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén nullához tart. Lényegében arról van szó, hogy a  $p/q$  racionális csavarási számú tóruszok, valamint az olyan irracionális csavarási számú tóruszok, melyek igen jól közelíthetők két szám hányadosaként, nem feltételenül élik túl a külső hatást. A megmaradó tóruszok a nagyon irracionálisak, ezeket szokás *KAM-tóruszoknak* is nevezni. Belátható, hogy kis  $\varepsilon$  értékre az összes tórusz semmiképpen sem tud felbomlani a perturbáció hatására [48].

Kis zavaró hatás esetén a felbomló tóruszok fázistér fogata kicsi, de nem nulla, ami azt jelenti, hogy a káosz már tetszőlegesen kis zavar esetén is megjelenhet egy olyan rendszerben, mely eredetileg nem volt kaotikus. Ezzel magyarázható az a kijelentés, hogy *a káosz nem a kivételes, hanem a tipikus időbeli viselkedés*.

### 2.3.2. Rezonáns tóruszok maradványai

Ahhoz, hogy a rezonáns tóruszok sorsát láthassuk, tekintsünk a perturbálatlan esetben három invariáns görbét a leképezésen  $(r; r_-, r_+)$ . A belső irracionális tórusz körüljárási iránya legyen az óramutató járásával egyező, a külső irracionális tóruszé ellenkező irányú. A középső egy racionális csavarási számú rezonáns tórusz, melynek pontjai a leképezés során önmaguk képei lesznek. (2.3a ábra)

A KAM-tétel értelmében külső zavaró hatás eredményeképpen az erősen irracionális



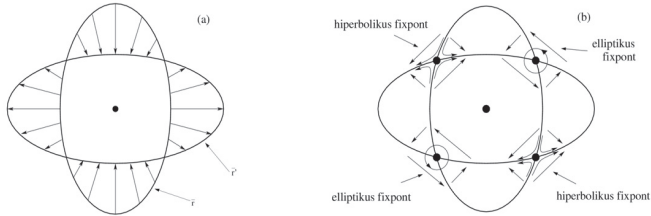
**2.3. ábra.** (a) A racionális csavarási számú tórusz ( $r$ ) két oldalán létezik egy egy ellentétes körüljárási irányú irracionális tóruszt ( $r_-$  és  $r_+$ ). (b) Az irracionális tóruszok a külső zavar hatására nem változnak jelentős mértékben, esetleg kissé deformálódhatnak, a körüljárási irány azonban nem változik meg.

tóruszok változatlanok maradnak, esetleg kissé deformálódhatnak, rajtuk a körüljárási jellege nem változhat. A racionális tórusz azonban felbomolhat, megszűnhet, mint invariáns görbe (2.3b ábra). A kérdés, hogy mi marad a helyén. A folytonosságnak megfelelően a perturbálatlan görbe közvetlen közelében létezik egy másik olyan görbe ( $\bar{\Gamma}$ ), melynek pontjai a perturbáció következtében sem fordulnak el. Ezen görbe pontjai a leképezés hatására csak sugárirányba mozdulnak el. Ha most erre a görbére ismét alkalmazzuk a leképezést, megint csak sugárirányú elmozdulást kapunk ( $\bar{r}$ ). Mivel a leképezés terület-tartó, a két görbe által határolt terület megegyezik. Következésképpen a két görbének metszenie kell egymást, méghozzá páros számú pontban. Ezek a pontok a leképezés *fixpontjai*. (2.4a ábra) [39]

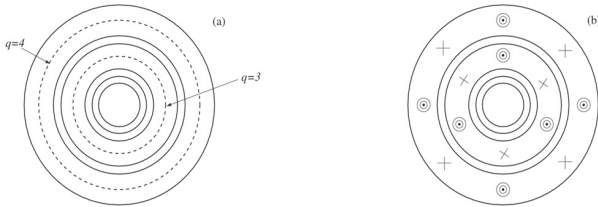
Milyen tulajdonságúak ezek a fixpontok? Visszagondolva, hogy a körüljárási iránya a rezonáns tóruszon belül megegyezik az óramutató járásával, kívül pedig ellentétes, valamint emlékezve, hogy a racionális tórusz képei sugárirányban kifelé, illetve befelé mozdultak el, a 2.4b ábrán a kis nyilak mutatják a leképezés hatására történő fixpontok körüli elmozdulásokat. Látható tehát, hogy a leképezés hatására a rezonáns tóruszok maradványaként egyenlő számú, egymást felváltva követő elliptikus és hiperbolikus fixpontok láncolata jött létre. Ez az ún. *Poincaré–Birkhoff-tétel*.

Az elliptikus fixpontok körül kis KAM-tóruszok alakulnak ki, mely tartományokban a lineáris elméletnek megfelelően ugyancsak kváziperiodikus a mozgás. Azonban ezen tartományokban is érvényes a rezonáns tóruszokra kapott fenti eredmény. Tehát itt is felbomlanak a nem elegendően irracionális invariáns görbék, elliptikus és hiperbolikus fixpontokat hagyva törmelékként maguk után. Azt, hogy hány elliptikus illetve hiperbolikus fixpont alakul ki, a racionális csavarási szám nevezője ( $q$ ) határozza meg (2.5a,b ábra).





**2.4. ábra.** (a) A perturbáció hatására a racionális tóruszhoz közeli invariáns görbe képe úgy adódik, hogy a pontok pusztán sugárirányban mozdulnak el. A leképezés ismételt alkalmazásával ugyancsak sugárirányú mozgást kapunk. Ennek következtében alakulnak ki a leképezés fixpontjai. (b) A fixpontok tulajdonságai a körüljárás irányából adódnak. Látható, hogy mindig páros számú fixpont képződik, valamint, hogy az elliptikus és hiperbolikus pontok váltakozva követik egymást.

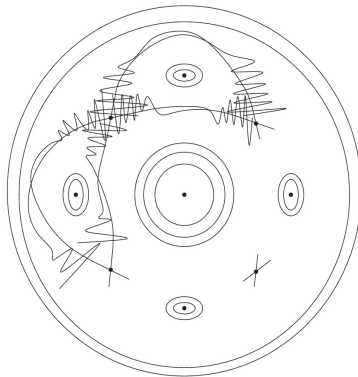


**2.5. ábra.** (a)-(b) A racionális csavarási szám esetén a  $p/q$  arányban  $q$  határozza meg, hogy a perturbáció hatására felbomló tóruszok helyén hány elliptikus és hiperbolikus fixpont keletkezik majd.

Ezt folytathatnánk a végtelenségig, mindig ugyanezt a viselkedést tapasztalnánk, és az eredetihez hasonló ábrát kapnánk; a rendszer fázistérbeli szerkezete fraktáltulajdonságot mutat.

A hiperbolikus fixpontok a kaosz forrásai. Ha végigkövetjük a fixpontokból kiinduló stabil és instabil sokaságokat tipikusan metszéspontokhoz érkezünk. Az azonos fixpontból induló oszcilláló sokaságok között *homoklinikus*, a különböző fixpontokból kiinduló sokaságok között pedig *heteroklinikus* pontok keletkeznek. Egy metszéspont megjelenése szükségszerűen végtelen sok metszéspontot eredményez, és ebből a mozgás kaotikussága következik. A leképezés hatására egyre jobban kanyargó, és ezáltal egyre több metszéspontot produkáló sokaságok hosszú időre vett követésével arra a felismerésre jutunk, hogy

sűrűn bejárják a fázistér egy jól meghatározott tartományát, kialakítva ezzel az egész *kaotikus sávot*. (2.6 ábra)



**2.6. ábra.** Az instabil fixpontokból kiinduló sokaságok és azok metszéspontjai adják a konzervatív rendszerek fázistérének jellegzetes alakzatát, a kaotikus sávot. A trajektória az idők végezetéig véletlenszerűen bejárja a fázistér ezen részét, egy sűrű halmazt alkotva. Sűrűlódásmentes rendszerekben a kaotikus sáv a káosz megjelenési formája. Az elliptikus fixpontok körül megmarad a reguláris jelleg, kváziperiodikus mozgással. Nagyobb nagyítás esetén, ugyanez a struktúra ismétli önmagát.

Az irracionális tóruszok választóvonalaként működnek, ugyanis invariáns görbék, melyeket a trajektóriák a leképezés síkjában nem léphetnek át.

A konzervatív rendszerek fázistérét tanulmányozva tehát elmondhatjuk, hogy a tóruszoknak kivételesen nagy szerep jut. Láttuk, hogy az integrálható rendszerekben kizárólag invariáns görbék léteznek a fázisprotrén. Kis külső zavart adva a rendszerhez bizonyos tóruszok felbomlanak, mások kis deformációval túlélnek a perturbációt. A felbomlott tóruszok vezetnek a sűrű kaotikus sáv kialakulásához, melyben a mozgás véletlenszerű, kaotikus. A sávokban azonban kisebb skálán is léteznek további KAM-tóruszok, melyek környékén ismét hasonló geometria figyelhető meg.

A dolgozat 3. fejezetében a Sitnikov-probléma fázistérének vizsgálata során a most megismert jelenségekkel numerikus számítások eredményeként mind találkozni fogunk.

## 2.4. Tranziens káosz

Az előző fejezetekben tárgyalt kaotikus sáv, az úgynevezett permanens káosz megtestesítője a sűrűlódásmentes rendszerekben. Ez azt jelenti, hogy a mozgás mindvégig kaotikus marad, és a trajektória nem hagyja el a fázistér egy jól definiált részhalmazát. Grebogi és tsai. [17] valamint Kantz és Grassberger 1985-ös klasszikus cikke [28] nyomán tudjuk azonban, hogy bizonyos körülmények között egy adott rendszerben léteznek olyan mozgások, melyek véges ideig mutatnak kaotikus viselkedést. A káosznak ezt a fajtáját *transziens káosznak* nevezzük. A fázistérben létezik egy jól meghatározható fraktáldimenzióval rendelkező halmaz, mely a káosz ezen tulajdonságáért felelős, ezt a halmazt nevezzük *kaotikus nyereghalmaznak*. A tranziens káoszlól megmutatták, hogy a rendszer sokkal inkább jellemző tulajdonsága, mint a permanens káosz [49].

### 2.4.1. A fázistérbeli nyereghalmaz

A következőkben megismerkedhetünk a tranziens káoszban használt, és a permanens káosztól eltérő fogalmakkal, kifejezésekkel, de ugyanakkor rámutatunk párhuzamokra is olyan dolgokban, melyeket a zárt káosz vizsgálatából már jól ismerünk. A tranziens káosz elnevezés a disszipatív rendszerekben megfigyelhető jelenségből kapta a nevét, mivel ezekben a rendszerekben a káosz elsősorban az attraktor megközelítésekor jelenik meg. A kezdőfeltételektől függően a különböző rendszerekben különböző idejű kaotikus mozgás alakul ki. Így célszerű bevezetni egy *átlagos időt* a tranziens jelenség jellemzésére. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az egyes trajektóriák helyett sok kezdőfeltételt vizsgálunk, és ezek fényében határozzuk meg a káosz átlagos élettartamát.

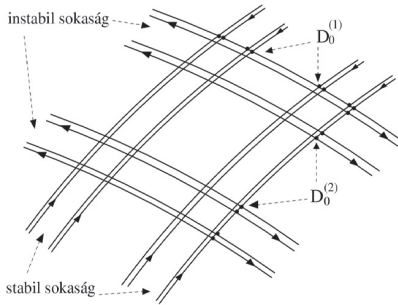
A fázistérben a kaotikus viselkedés a nyereghalmaz közelében játszódik le, ezért, ha egyenletesen elhelyezünk  $N(0) \gg 1$  kezdőfeltételt, abból egyesek előbb, mások később hagynak el egy előre, találmra kiválasztott tartományt. Azok, melyek hosszú ideig bentmaradtak, lesznek a kaotikusak (miután elhagyták a rendszert a bonyolult mozgás is megszűnhet). Adott  $t$  idő után a tartományban maradt trajektóriák  $N(t)$  száma elegendő hosszú idő esetén exponenciális csökkenést mutat [18]:

$$N(t) \approx e^{-\kappa t}. \quad (2.8)$$

Itt  $\kappa$  a *kilépési ráta*, melyből megkaphatjuk az *átlagos szökési időt*:

$$\tau = \frac{1}{\kappa}. \quad (2.9)$$

A kaotikus nyereghalmaz a rajta fekvő végtelen sok instabil periodikus pályához tartozó



**2.7. ábra.** A nyereghalmaz sokaságainak sematikus képe.  $D_0^{(1)}$  és  $D_0^{(2)}$  az instabil és stabil sokaságok irányában vett parciális dimenziók. A Cantor-szálas szerkezet miatt a stabil és instabil sokaságok fraktáldimenziói  $D_0^{(s)} = 1 + D_0^{(1)}$  és  $D_0^{(i)} = 1 + D_0^{(2)}$ . A nyereghalmaz a stabil és instabil sokaságok metszéspontja, így fraktáldimenziója a parciális dimenziók összege:  $D_0 = D_0^{(1)} + D_0^{(2)}$ .

stabil és instabil sokaságok metszeteként fogható fel, ahol a stabil (instabil) sokaság megszámlálhatatlanul sok egymással közel párhuzamos fraktál halmazból áll, vagy másképp fogalmazva melynek pályái az invariáns nyereghalmazt  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) idő alatt közelítik meg. A nyereghalmaz elnevezés igen találó, mert a halmaz minden egyes pontja körül az egyik irányban összehúzódás, a másikban megnyúlás megy végbe a fázistérben, akárcsak egy hiperbolikus (nyereg) pont körül.

A tranzien káoszban a fázistérbeli geometria és a rendszer dinamikai viselkedése közti kapcsolatot Kantz és Grassberger cikke [28] alapozta meg. Kimutatták, hogy a tranzien káosz  $\kappa \rightarrow 0$  határesetben a permanens káosz tulajdonságaival rendelkezik. A fázistérbeli nyereghalmaz egy összetett fraktál, melynek dimenziója (az egyes irányokban vett parciális dimenziók összege) szoros kapcsolatban van a mozgás dinamikájával. (2.7 ábra) Az invariáns halmaz tulajdonságainak kimerítő vizsgálatát megtalálhatjuk Hsu és tsai. [23] cikkében.

A következőkben bemutatom, hogy a fent említett irodalomban megismert tulajdonságok ugyanúgy érvényesek (a területtartás feltétele mellett  $\sigma = 0$  vagy  $J = 1$ , ahol  $\sigma$  a fázistérfogat összehúzódási ráta,  $J$  a leképezés Jacobi-determinánsa) konzervatív esetben is, mint dissipatívban. Konzervatív esetről lévén szó, az átlagos Ljapunov-exponensek,

melyek már függetlenek az integrálási időtől, ellentettjei egymásnak  $\overline{\lambda'} = -\overline{\lambda}$ . A parciális dimenziókra így a következőt kapjuk:

$$D_0^{(1)} = D_0^{(2)} \gtrsim 1 - \frac{\kappa}{\lambda}, \quad (2.10)$$

ahol  $D_0^{(1)}, D_0^{(2)}$  az instabil és stabil irányok parciális dimenziói. A kaotikus nyereghalmaz dimenziója

$$D_0 \gtrsim 2 \left( 1 - \frac{\kappa}{\lambda} \right), \quad (2.11)$$

az egyes sokaságoké pedig

$$D_0^{(i)} = D_0^{(s)} \gtrsim 2 - \frac{\kappa}{\lambda}. \quad (2.12)$$

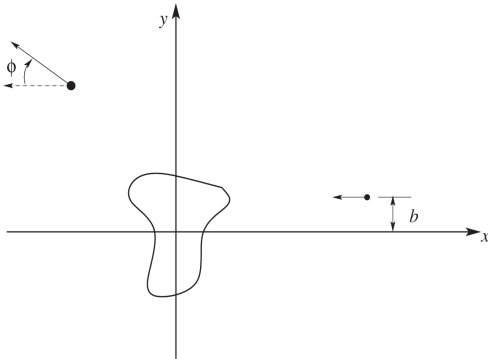
$D_0^{(i)}$  és  $D_0^{(s)}$  az instabil és stabil sokaságok fraktáldimenziója. A parciális dimenziók, valamint a stabil és instabil sokaságok dimenzióinak egyenlősége konzervatív rendszerekben az időtükrözés invarianciájának következménye.

#### 2.4.2. Kaotikus szórás

A kaotikus szórás a tranziens káosz konzervatív határeset. A szórási problémát általános esetben egy „bemeneti” és egy „kimeneti” változó közti kapcsolattal definiáljuk, mely változók egy dinamikai rendszer (általában Hamilton-rendszer) kezdőfeltételeit, illetve végállapotait jellemzik. A legegyszerűbb szórási probléma, ha veszünk egy részecskét, mely egy  $V(x)$  potenciáltérben mozog, ahol  $V(x)$  a végtelenben nulla, vagy elhanyagolhatóan kicsi. Ezért a szórási tartományon kívül a részecske egyenes (vagy közelítőleg egyenes) vonal mentén mozog. Ahogy a pálya megközelíti a szórási tartományt, kölcsönhatásba lép a szóró objektumokkal, majd elhagyja a térrészt. A kétdimenziós szórási probléma sematikus vázlata látható a 2.8. ábrán.

Az ábrán definiálunk egy bemeneti ( $b$ ) és egy kimeneti paramétert ( $\phi$ ). A kérdés a következő: Mi az alapvető összefüggés a bemeneti és a kimeneti állapotok között? Az az érdekes, hogy a kapcsolat kvalitatíve más abban az esetben, ha a dinamika a szórási tartományban kaotikus, mint amikor reguláris (lásd Ott és Tél [40], Bleher és tsai [5], valamint Eckhardt [13] munkáit).

A kaotikus szórás jellemzésére kézenfekvő a *szórási függvény* vizsgálata, mely adott integrálási idő után mutatja a kimeneti változó értékét a bemeneti változó függvényeként. Reguláris esetben  $\phi(b)$  simán változó függvény, míg kaotikus esetben vadul ugráló,



**2.8. ábra.** A szórási probléma kétdimenziós esetének vázlatos ábrázolása.

szakadásokkal tarkított. Külön megjegyzendő még, hogy a függvény alakja a *rálövési paraméter* adott, kis tartományában a felbontás növelésével hasonló alakú marad. Azaz itt is találkozunk a kaotikus viselkedés és a fraktáltulajdonság kapcsolatával [4].

A teljesség igénye nélkül megemlítek még néhány módszert, melyekkel a szórási tulajdonság igen jól jellemezhető, vizsgálható.

Az *idő-eltolási függvény* azt mondja meg, hogy a rálövési paraméter függvényében egy adott pálya mennyi időt tölt a szórási tartományban. Kaotikus esetben az említett függvény végtelen értéket vesz fel, valahányszor az eltérülés szögében szingularitás lép fel [40].

Egy másik lehetséges elemzése a kaotikus szórás tulajdonságainak, ha a pályák azon invariáns halmazát tekintjük, ahol azok nem hagyják el a szórási tartományt  $t \rightarrow \pm\infty$  ideig. A dinamika ezen a halmazon kaotikus, és természetesen a halmaz az előző részben megismert kaotikus nyereghalmaz. A szórási függvényben a szinguláris  $b$  változókhoz tartozó fraktálhalmaz azokhoz a  $b$  értékekhez tartozik, melyek a stabil sokaságon vannak rajta [24], [25].

Alapvető szempont a kaotikus szórásban az *idő-eltolási statisztika*  $P(T)$ . Képzeljük el, hogy véletlenszerűen választunk rálövési paramétereket egy adott intervallumból, majd vizsgáljuk, hogy az ezekhez tartozó pályák mennyi  $T$  időt töltöttek a szórási tartományban. A  $T$  és  $T + dT$  közé eső pályák száma  $P(T)dT$ . Hiperbolikus dinamika esetén (távol a reguláris tartományoktól) azt kapjuk, hogy az idő-eltolási statisztika exponenciálisan

változik

$$P(T) \sim \exp(-T/\tau), \quad (2.13)$$

ahol  $\tau$  a szóró objektum karakterisztikus ideje. A viselkedés a KAM-tóruszokhoz közel eső tartományokban alapvetően más. Ebben az esetben  $P(T)$  hatványtörvény szerint változik [36],[32], [34]

$$P(T) \sim T^{-\sigma}. \quad (2.14)$$

Ahhoz tehát, hogy eldöntsük, vajon egy konzervatív rendszerben létezik-e tranziens káosz, célszerű megvizsgálni a problémát szórási szempontból [31], [46], [9], [14]. Égi mechanikai rendszerekben eddig nemigen találkozhattunk a tranziens káosz részletes vizsgálatával. Éppen ezért fektettem rá kellő hangsúlyt, hogy a Sitnikov-problémát, mint szórási feladatot is vizsgáljam. Ennek részletes bemutatására a véges idejű kaotikus viselkedés mellett a 4. fejezetben keríték sort.

# 3

## A Sitnikov–probléma fázistere

Az előző fejezetekben láttuk, hogy a dinamikai rendszerek tanulmányozása során elének táruló mozgások széles skálájának megértéséhez elengedhetetlen egy szemléletváltás a mechanika klasszikus feladatainak vizsgálatához képest. A fázistérbeli tisztánlátás az ember absztrakciós képessége miatt az alacsony szabadsági fokú rendszerekben jóval könnyebb, mint a magas dimenziós fázistérben való bolyongás. Ez lehet az oka talán, hogy a komplex mozgások néhány évtizedre visszatekintő beható vizsgálata során néhány egyszerű rendszer lett a vizsgálatok tárgya. Ezek például a Standard–leképezés, a Hénon–Heiles-potenciál, a korlátozott háromtest-probléma. Ezekkel a rendszerekkel számtalan szerző kiváló cikkeiben találkozhatunk újra és újra, mint a káosz egy újonnan felfedezett tulajdonságának mintapéldájával. Természetesen ebből nem következik, hogy csak egyszerű rendszerekkel érdemes foglalkozni, mivel kaotikus jelenségek az összetettebb problémákban is jelen vannak – lásd a Naprendszert – azonban véleményem szerint biztosabb talajon áll az, aki az egyszerű dolgoktól halad a bonyolultabbak felé, mint fordítva.

Az egyszerű rendszereket szem előtt tartva e fejezetben a már említett Sitnikov–probléma fázistérében tett vizsgálataim új eredményeit mutatom be olyan időrendet követve, ahogy azt én megismertem, eljutva így egy olyan általános képig, mely mindenképpen új megvilágításba helyezi az égi mechanika ezen egyszerű és speciális rendszerét. Az ezt követő fejezetben rátérek a problémában jelen lévő véges idejű kaotikus viselkedés vizsgálatában elért eredményeim bemutatására.

### 3.1. A fázisportrén túl

Az első fejezetben kapott helyet a SP rövid bemutatása, melynek során a konzervatív rendszerekben fellépő kaotikus viselkedés alapvonásait ismertük meg. A rendszer az égi mechanika legegyszerűbb nem–integrálható problémája. A mozgások változatos lehe-



tősegeinek tanulmányozására a megismert leképezések, jelen esetben pedig gerjesztett egydimenziós mozgás lévén, a stroboszkópikus leképezés ad lehetőséget.

A stroboszkópikus metszeteken alkalmazott néhány tucat, esetleg pár száz kezdőfeltételnél többet nem érdemes felvenni, mert a túlzott részletgazdagság éppen azt eredményezi, hogy a jól kivehető struktúrák eltűnnek. Másrészt a Poincaré-térképeken kialakuló alakzatok csak a mozgás milyenségéről adnak számot, dinamikai jellemzőiről nem. Kézenfekvő tehát más módszerrel is megvizsgálni a problémát.

A káosz kvantitatív jellemzésére szolgálnak a Ljapunov-féle karakterisztikus ( $\lambda$ ) kitevők. Ahogy azt már láttuk,  $\lambda$  a fázistérben egymáshoz közel induló pályák széttartásának gyorsaságát méri, illetve reciproka az előrejelzési idő, így a Ljapunov-exponens az előrejelezhetetlenség mérőszámának is tekinthető. Érdemes tehát az eddig stroboszkópikus leképezéssel vizsgált területeket Ljapunov-exponensekkel is feltérképezni, így mérőszámokat rendelve az egyes kezdőfeltételekhez. Mellesleg megjegyzendő, hogy így a kezdőfeltételek száma nagyságrendekkel növelhető, sőt, minél több kezdőfeltételt vizsgálunk, az ábra annál szebb és részletgazdagabb lesz.

A Ljapunov-kitevők számításának egyik módszere, hogy a mozgásegyenleteket és azok linearizáltjait egyidejűleg numerikusan integráljuk [47]. Írjuk a problémát leíró egyenleteket elsőrendű differenciálegyenletek alakjában:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = (1, 2, \dots, n). \quad (3.1)$$

Adott  $x_i(0)$  kezdőpontból induló megoldáshoz tetszőlegesen közeli  $x_i(0) + \xi_i(0)$  pontból induló megoldást a linearizált egyenletek írják le:

$$(x_i + \xi_i) = \dot{x}_i + \ddot{\xi}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_j - (x_j - \xi_j)) + \dots, \quad i = (1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

A Taylor-sorfejtésből, valamint (3.1)-ből következik, hogy

$$\ddot{\xi}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j, \quad i = (1, 2, \dots, n), \quad (3.3)$$

ahol  $\partial f_i / \partial x_j$  a Jacobi-mátrix, melyet az eredeti pálya  $x_i(0)$  kezdőpontjából induló trajek-

tória mentén kell számolni. A SP linearizált egyenletei 1.6 és 3.3 alapján:

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{d\xi}{dE} = (1 - e \cos E)\eta, \\ \eta' &= \frac{d\eta}{dE} = \left( -\frac{1 - e \cos E}{[z^2 + \frac{1}{4}(1 - e \cos E)^2]^{3/2}} + \frac{3z^2(1 - e \cos E)}{[z^2 + \frac{1}{4}(1 - e \cos E)^2]^{5/2}} \right) \xi.\end{aligned}\quad (3.4)$$

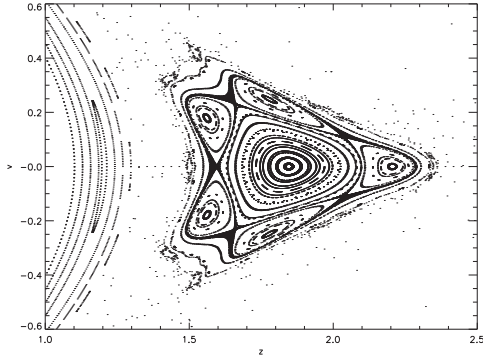
A gyakorlatban a két pálya *fázistérbeli* eltérését  $\tau$  időtartamonként normalizálják a kezdeti távolságra, hogy a két pálya egymás közelében maradjon. Vezessük be a

$$\gamma = \frac{1}{n\tau} \sum_i^n \ln \frac{d_i}{d_0} \quad (3.5)$$

mennyiséget, ahol  $n$  az iterációs lépések száma,  $d_0$  a kezdeti,  $d_i$  pedig az  $i$ -edik lépésnél a két pálya eltérése. A Ljapunov-kitevőt  $\gamma$  határértéke adja meg:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma. \quad (3.6)$$

A numerikus számítások során a véges integrálási idő miatt  $\lambda$ -t extrapolálással határozzák meg  $\gamma$  időbeli változásából. Abban az esetben, ha  $\lambda$  nullához tart, a mozgás reguláris, ha pedig véges pozitív határértékhez, akkor kaotikus.

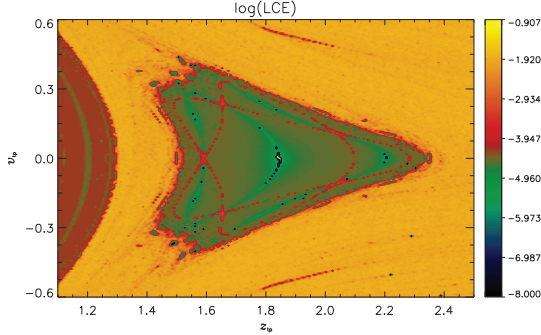


**3.1. ábra.** A fázisportré  $e=0.093$  excentricitás értékre.

Nézzük meg, hogy a fent vázolt módszer milyen eredményt ad a vizsgált problémára. Ehhez először válasszunk egy részletgazdag fázisportrét (3.1 ábra). Ezen minden rajta van, ami kell: a stabil mozgást jellemző szigetek, kaotikus sáv a szigetek között, és a

szétszórt pontok, melyek az elsőző pályák megjelenési formái.

A 3.2 ábrán a fenti fázisportrét elkészítettem úgy, hogy egy nagyfelbontású rácsot adtam meg a  $(z, \dot{z})$  síkon, és minden egyes rácsponthoz mint kezdőfeltételhez kiszámítottam az aktuális Ljapunov-kitevőt. A jobb vizuális élmény érdekében az azonos értékeket azonos színnel tüntettem fel egy kontúrtérképén. Az ábrán a kitevők logaritmusát szo-

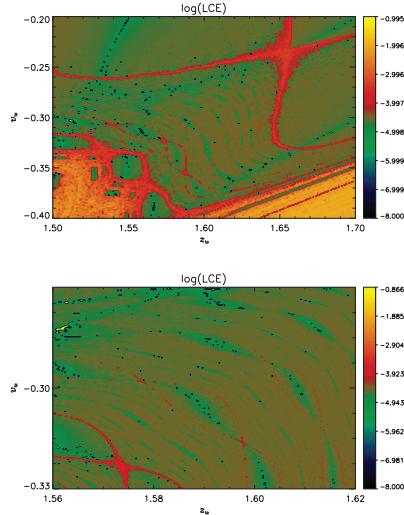


**3.2. ábra.** A  $(z, \dot{z})$  fázissíkon számított Ljapunov karakterisztikus kitevők  $e=0.093$  excentricitás értékre. A kezdőfeltételek a következők voltak:  $z_0 \in [1.2; 2.5]$  és  $\dot{z}_0 \in [-0.6; 0.6]$ , az ábra felbontása  $\Delta z_0 = 0.0065$ ,  $\Delta \dot{z}_0 = 0.006$ . A jobb oldali színskála mutatja az egyes kezdőfeltételekhez tartozó szinkódok értékeit. A citromsárga színhez tartozik a leginstabilabb viselkedés, míg a sötét színek felé haladva a mozgás egyre regulárisabb. Az ábrán a 2:1-es rezonancia jobb oldali szigete, valamint az origót körülölelő invariáns görbék egy kis szelete látszik, mint stabil tartományok. A rezonancia fő szigete és a másodrendű szigetek között narancssárgával szépen kirajzolódik a kaotikus sáv. A fázissík nagy részét azonban igen instabil ( $\lambda \approx 10^{-1}$ ) pályák jellemzik.

kás ábrázolni, hogy a nagy nagyságrendbeli különbségek jól látszódnak. A Ljapunov-exponensek értékeinek megfelelő szint az ábra jobb oldalán látható paletta mutatja a tízes alapú hatványkitevők függvényében. Amint arról már esett szó, reguláris mozgás esetén a Ljapunov-kitevők nullához tartanak (a hatványkitevőben „nagy” negatív szám áll), míg kaotikus esetben nagyjából egy körüli értéket vesznek fel (a hatványkitevő nulla körüli érték). A színes ábrázolásmódnak köszönhetően az olvasó egyből meg tudja állapítani a reguláris és kaotikus tartományok elhelyezkedését. A nagy Ljapunov-kitevő értékekhez tartozik a sárga szín, a kisebbekhez a piros, majd a zöld és végül a kék szín jelzi a reguláris pályáknak megfelelő kezdőfeltételeket.

Az eredmény meggvőző, hiszen összehasonlítva a 3.1 ábrával  $\lambda$  kis értékei éppen a

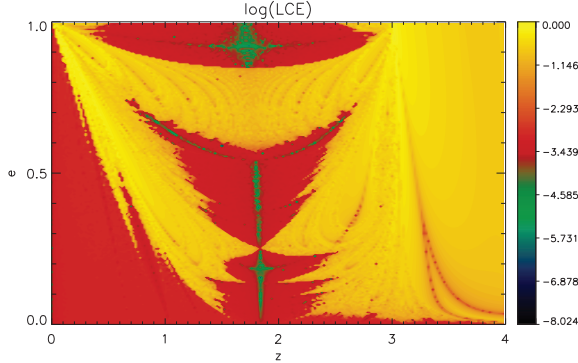
tóruszoknak felelnek meg, míg a sárga területek a szélszórt pontoknak, illetve kaotikus sávoknak. Ezzel tehát elmondhatjuk, hogy dinamikai szempontból vizsgálva a pályákat visszakaptuk a várt eredményt. Az előrelépés pedig nem csekély, ugyanis a Ljapunov-kitevők segítségével több tízezer kezdőfeltételt ábrázolhatunk egy fázisportrén. Ha pedig kisebb területről szeretnénk még részletgazdagabb információt begyűjteni, nem kell mást tenni, mint a felbontást növelve az adott térrészben meghatározni a Ljapunov-kitevőket. A 3.3 ábra ilyen kinagyított részleteket tartalmaz.



**3.3. ábra.** A  $(z, \dot{z})$  fázissík kinagyított részletei  $e=0.093$  excentricitás értékre. Szépen látszanak a szigetláncok között húzódó kaotikus sávok (narancssárga), valamint a már felbomlott külső tóruszokból visszamaradt szigetek.

Jogos a felvetés, hogy mindezzel még olyan nagy előrelépést nem értünk el a stroboszkópius leképezésekhez képest, mivel hasonló struktúrát már azokon is kaptunk, így a fázistérrel jelentősen új információ nem került a birtokunkba. Azonban az általam kifejlesztett kód segítségével megválaszthatjuk úgy is a kezdőfeltételeket, hogy például a sebességet állandó értéken tartjuk (kézenfekvően nullának választjuk), majd a fősíktól mért kezdeti kitérést valamint a kettős excentricitását változtatjuk, és így számítjuk a Ljapunov-kitevőket. Hogy világosabb legyen, tekintsük a 3.4 ábrát, ahol a  $(z, e)$  paramétersíkon ábrázoltam az egyes pontokhoz tartozó  $\lambda$ -kat. Míg a 3.2 ábrán egy adott ex-

centricitás értékre ( $e=0.093$ ) láttuk a  $(z, \dot{z})$  kezdőfeltételből kiinduló pályákat, addig a 3.4 ábrán a  $0 \leq z \leq 4$  és  $\dot{z} = 0$  kezdőfeltételhez tartozó pályák különböző paraméterértékekre vannak feltüntetve. Ennek az ábrázolásmódnak már megvan az előnye a stroboszkópikus



**3.4. ábra.** *Ljapunov-kitevők a  $(z, e)$  fázissíkon. Az ábra úgy készült, hogy a tömeg nélküli harmadik égitest kezdeti kitérését változtatva ( $z_0 \in [1; 4]$ ) nulla kezdősebesség mellett ( $\dot{z}_0 = 0$ ) a főkomponensek excentricitása változott ( $e \in [0; 0.995]$ ). A felbontás  $\Delta z_0 = 0.02$  és  $\Delta e = 0.005$  volt. Az ábra elképzelhető úgy is, mint adott fázissíkok  $\dot{z} = 0$  tengellyel vett metszeteinek felsorakoztatása egymás fölé az excentricitás növekedtével. Így valójában ez az ábra a középponti stabil fixpont és a 2:1-es rezonancia körüli szigetek  $z$ -tengely irányába eső metszeteinek változását mutatja az excentricitás függvényében. Jól látható, ahogy a rezonancia szigete  $e \approx 0.2$  értéknél eltűnik, majd később ismét megjelenik. Egy másik drasztikus változás a sziget „életében”, hogy  $e \approx 0.544$  körül bifurkáció lép fel, és a sziget kettészakad egy instabil és két stabil periodikus pályát eredményezve. Újabb eltűnés után nagyjából 0.85-os excentricitás értéknél jelenik meg ismét.*

metszetekkel szemben, mégpedig az, hogy a C Függelékben bemutatott fázisportréknak megfelelően – melyek a különböző paraméterértékekhez tartozó stroboszkópikus metszeten bekövetkező változásokat hivatottak bemutatni – egy ábrán mutatja be a különböző excentricitásokhoz tartozó pályákat. Azaz a 3.4 ábra elképzelhető úgy, mintha a C Függelékben lévő fázisportrékat egymásra helyeznénk, és aztán a  $\dot{z} = 0$  tengely mentén egy metszetet készítenénk róluk. Ezen metszet vízszintes tengelyén a kezdeti kitérés lesz ( $z$ ), függőleges tengelyén pedig az excentricitás ( $e$ ). Így ezekhez a  $(z, e)$  párokhoz rendelt  $\lambda$ -kat láthatjuk a kontúrtérképen.

Az előzőekben elmondottakból következik, hogy a 3.4 ábrán lényegében a  $(z, \dot{z})$  fázissíkon a  $\dot{z} = 0$  tengely mentén vett metszet változását látjuk az excentricitás függvényében.

Vagyis nyomon követhetjük például a 2:1-es rezonancia jobb oldali szigetének (ami nagyjából  $1.2 \leq z \leq 2.5$  között helyezkedik el) változását miközben a kettősök excentricitása egyre nagyobb lesz. Látható, hogy kb.  $e = 0.2$ -nél a sziget teljesen eltűnik, majd ismét növekedni kezd, és  $e \approx 0.54$ -nél egy bifurkációs ponthoz ér. (Vö.: C.1 ábra)

Most már látszik, hogy mennyivel nyújt többet ez a fajta ábrázolásmód a stroboszkópikus metszeteknél. Hozzá kell persze tenni, hogy ezt a képet igen nehéz lett volna értelmezni, ha fogalmunk nincs előtte, hogy miként néz ki a  $(z, \dot{z})$  fázissík különböző excentricitásokra.

### 3.2. A 3D-s folyam

A Ljapunov-kitevőknek köszönhetően egy kissé tágabb kép tárult elénk a SP fázisterének szerkezetéről. Van azonban egy alapvető fontosságú tulajdonsága a rendszernek, melyet eddig csak hallgatólágosan használtunk fel. Mint az már korábbról ismert, a problémában az elhanyagolható tömegű részecske egydimenziós mozgást végez, külső periodikus gerjesztőerő hatására. Az ilyen rendszerek dinamikai viselkedésére vezettük be az első fejezetben a stroboszkópikus leképezést. Láttuk azt is, hogy ebben az esetben a Newton-egyenlet nem autonóm. Másfelől a gerjesztőerőt az idő helyett a fázis függvényeként is felírhatjuk, ami azt eredményezi, hogy az eredeti nem autonóm mozgásegyenlet átírható három elsőrendű differenciálegyenlet autonóm rendszerére, azaz a fázistér háromdimenziós. Itt most visszautalunk, hogy az 1.2 ábrán láttuk a stroboszkópikus leképezés vázlatát, melyen a háromdimenziós fázistérben a metszési síkok  $T$  periódusidővel ( $2\pi$  fázisváltozással) követik egymást az időtengelyre (fázistengelyre) merőlegesen. Nem feledkezhetünk meg arról sem, hogy a gerjesztőerő az időn kívül függhet még a rendszer pillanatnyi helyzetétől is. Ebből az következik, hogy ha adott kezdőfeltételekhez különböző főkomponens-fázisok tartoznak, a végső mozgás is különböző lesz.

A fenti bekezdésben elmondottak mind érvényesek az általam vizsgált rendszerre is. Elmondható tehát, hogy a SP fázistere háromdimenziós, és a periodikus gerjesztőerő függ a kettősök helyzetétől. Felmerül tehát a kérdés, hogy miként változik meg a fázissíkok struktúrája, ha különböző időpontokban (a kettősök más-más pályamenti helyzeténél) vesszünk mintát a mozgásból. Ez lényegében nem jelent mást, mint hogy a stroboszkópikus leképezés metszési síkjait eltoljuk az idő-tengely (fázis-tengely) mentén, így „letapogatva” a háromdimenziós fázistér tényleges szerkezetét.

A kérdés annál is inkább érdekes, mert az irodalomban az eddigi numerikus vizsgálatok során kizárólag a kettősök pericentrum-átmeneténél vették a mintát. Ez azt eredményezte, hogy kialakult egy jól beidegződött kép a Sitnikov-probléma fázisteréről (fá-

zisportréjáról), amely ugyan megfelelően leírta a rendszert, de a fázis tér tényleges voltát nem tárta a kutatók elé. (C Függelék)

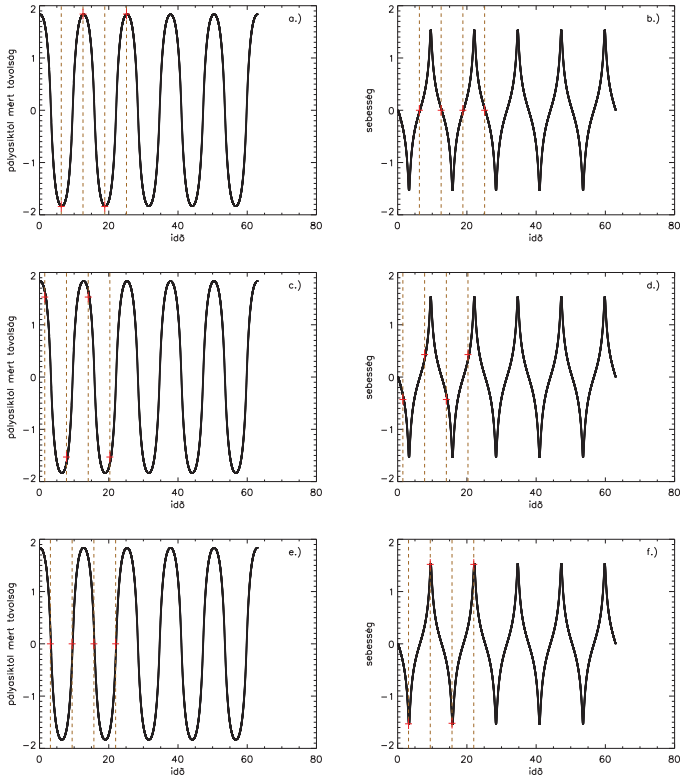
A következőkben bemutatom azokat az eredményeimet, melyek a háromdimenziós fázis tér szerkezetével kapcsolatosak. Ahhoz, hogy világos legyen, miként is működik a stroboszkópikus leképezés metszeteinek eltolása, lássunk néhány ábrát, melyek a 2:1-es rezonancia esetén mutatják a próbatest helyzetének és sebességének időbeli alakulását. (Az, hogy a harmadik test 2:1-es rezonanciában van, azt jelenti, hogy amíg a főkomponensek megtesznek két teljes keringést (azaz eltelik  $4\pi$  idő), addig a próbatest éppen visszatér a kiindulási pozíciójába egy teljes periódus megtétele után.)

A 3.5 ábra mutatja a  $z(t)$  és a  $\dot{z}(t)$  görbékét. Meg kell azért jegyezni, hogy a numerikus eljárás hibáját figyelembe véve a rezonancia pontos helye a fázis térben nem adható meg. Vannak természetesen különböző módszerek periodikus pályák keresésére [6],[27], de ez nem tárgya jelen értekezésnek. Ennél fogva, amikor rezonanciáról beszélek, minden esetben egy a rezonanciának megfelelő kezdőfeltételhez nagyon közeli pontból indított mozgást vizsgálók, mely az emberi szem számára jó közelítéssel adja vissza a pontos ciklust. Az ábra első sorában a leképezés kezdeti konfigurációja éppen olyan, hogy a  $t = 0$  ( $E = 0$ ) időpontba helyeztük az első metszetet, vagyis amikor a főkomponensek pericentrumban tartózkodnak. Értelemszerűen az egyes metszési síkok  $2\pi$  periódussal követik egymást ( $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ ), így ennek megfelelően a fázisportrén megjelenő pont mindig a pericentrum-átmenet időpontjához tartozik. Jól látszik, hogy a 2:1-es rezonanciának két pont felel meg a fázissíkon  $(z, \dot{z})_0 = (\pm 1.84, 0)$  a függőleges tengelytől balra és jobbra. Ezt ellenőrizhetjük is a C.1 ábra c paneljén.

Mármint, ha ugyanehhez a kezdőfeltételhez tartozó mozgásból egy másik időpontban veszünk mintát, legyen ez mondjuk  $E = \pi/2$  és ennek  $2\pi$ -vel eltolt értékei ( $5\pi/2, 9\pi/2, 13\pi/2, \dots$ ) azaz, amikor a főkomponensek egy negyed keringést tettek meg, azt látjuk a 3.5 ábra második sorában. Ekkor is két metszéspontot kapunk  $2\pi$  elteltével, csak éppen más helyen. Leolvasva ezeket a helyeket kapjuk, hogy a fixpontok most a  $(z, \dot{z})_{\pi/2} = (\pm 1.53, \mp 0.43)$  pontokban jelennek meg a fázissíkon. (Tehát nincsenek rajta a vízszintes ( $\dot{z} = 0$ ) tengelyen!)

Harmadik esetben (3.5 ábra e, f panel) a metszeteket  $E = \pi$ , illetve  $3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$  értékeknél véve, kapjuk az apocentrumbeli pozícióknak megfelelő 2:1-es rezonanciák pontjait a fázisportrén, ezek  $(z, \dot{z})_{\pi} = (0, \mp 1.62)$ .

A 3.6 ábrán a fent leírtaknak megfelelően ábrázoltam a 2:1-es rezonancia szigeteit más-más főkomponens-fázisoknál (lényegében három fázisportrét rajzoltam egymásra). A különböző színű „pacák” a 3.5 ábra egyes sorainak megfelelő helyen mutatják a ciklusokat és a körülöttük lévő reguláris tartományt. Érdekes megfigyelni, hogy miként válto-

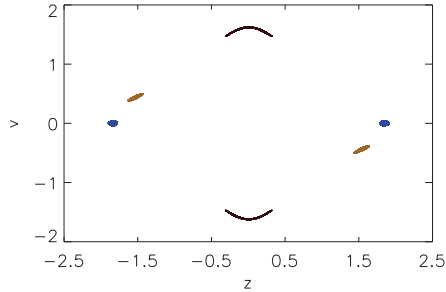


**3.5. ábra.** A 2:1-es rezonancia közelében ( $z = 1.84$ ) indított tesztrészecske  $z(t)$  kitérés–idő és  $\dot{z}(t)$  sebesség–idő grafikonja ( $e=0.2$ ). Az egyes sorokban a paneleken látható függőleges szaggatott vonalak a stroboszkópikus leképezés metszési síkjait hivatottak jelölni. Az első sorban a leképezés kezdeti konfigurációja egybe esik a főkomponensek pericentrumátmenetével. Azaz a metszési síkok  $0 + k2\pi$  ( $k$  egész szám) időközönként vesznek mintát a mozgásból. A második sorban a leképezés  $90^\circ$ -os főkomponens pozíciókban rögzíti a kitérés és sebesség pillanatnyi értékeit. Végül a harmadik sorban a  $180^\circ$ -os fázishoz tartozó értékeket kapjuk. A megfelelő fázisokban vett mintákat a fázissíkon ábrázolva kapjuk a 3.6. ábrát.

zik meg a „cseppek” alakja a kettős különböző pozícióihoz tartozó fázisportrékon.

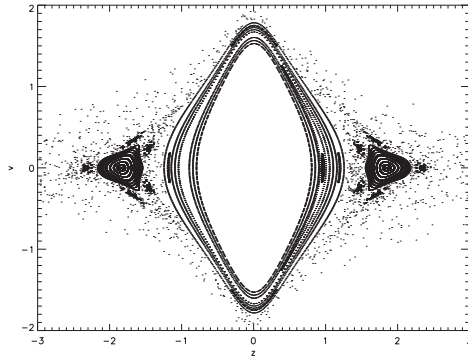
Mielőtt azonban bármire is „gyanakodnánk” a látottakból, nézzük meg először, hogy miként néz ki egy fázisportré, mely abban az időpontban (fázisban) készült, amikor a két





**3.6. ábra.** A 2:1-es rezonancia szigetei három különböző fázisbeli fázisportrén. A három fázishoz  $E = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  (kék, barna, fekete) tartozó fázisportrékat egymásra rajzolva láthatjuk, hogy miként változik a rezonanciához tartozó kis szigetek pozíciója és alakja. Az ábrán látható „pacák” a fixpontok és környezetük invariáns görbéi, melyeket 100 kezdőfeltétel  $z_0 \in [1.79; 1.89]$  ( $\Delta z = 0.0001$ ) rajzol ki 1000 keringésnyi időre. A szigetek tehát a kezdőfeltételek nagy száma és az ábra méretei miatt látszanak kis foltoknak, valójában koncentrikus zárt görbék. Első ránézésre észrevehető, hogy a szigetek az óramutató járásával megegyező irányban elmozdultak a középpont körül (ahogy  $E$  változik), valamint jelentős alak deformációt is szenvedtek ezalatt. Az excentricitás 0.2 volt.

tömeggel rendelkező égitest éppen a pericentrumban volt. A 3.7 ábrán egy olyan ese-



**3.7. ábra.** Az  $E=0$  fázishoz, azaz a főkomponensek pericentrum-átmenetéhez tartozó fázisportré. Az ötvenegy kezdőfeltételt a  $z_0 \in [0.5; 2.5]$  tartományból vettem, a számolási idő 1000 keringés volt. A kezdeti sebesség  $\dot{z}_0 = 0$ , az excentricitás  $e = 0.1$  volt.

tet választottam, melyben az excentricitás aktuális értéke ( $e=0.1$ ) mellett jól látszanak a különböző rezonanciáknak megfelelő szigetek. Ezenkívül a 2:1-es rezonancia körül megfigyelhetők még másodrendű rezonanciákhoz tartozó tóruszok is, melyeknek a későbbiekben lesz nagyobb szerepük.

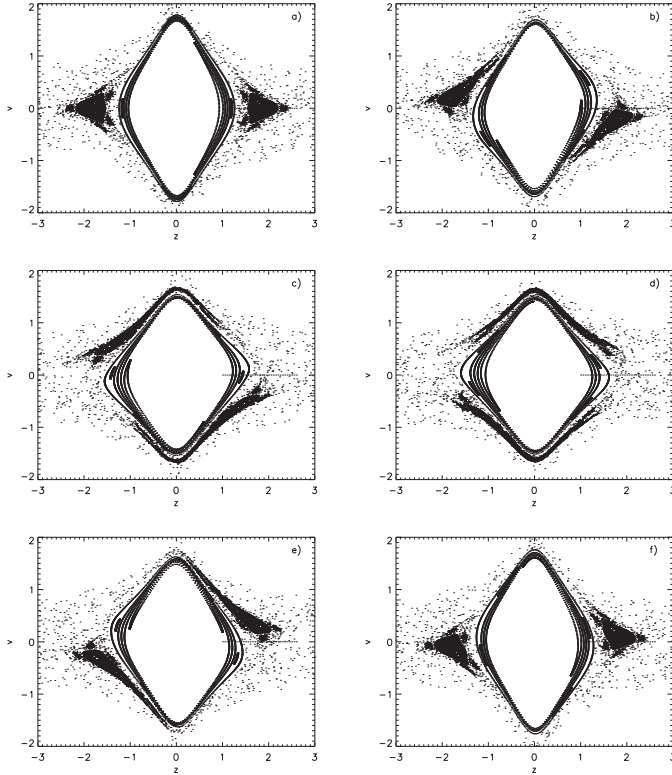
Most pedig ugorjunk neki a dolognak „nagygyúval”, és helyezzünk el egyenletesen 40 darab metszetet a főkomponensek megfelelő fázisaiban<sup>1</sup>. Ez azt jelenti, hogy 9 fokonként veszünk mintát a háromdimenziós fázistérből a harmadik tengely mentén. A fent bemutatott példákhoz hasonlóan járunk el, és ezentúl már csak a fázisportrékra hagyatkozunk, az ott zajló változásokat követjük figyelemmel.

A következőkben nézzük meg, hogy mi történik a 3.7 ábrán látható fázisportréval, ha változtatjuk a metszési síkok helyzetét. Ezt szemlélteti a 3.8 ábra. Követve az egyes paneleken végbemenő változást, első pillantásra is szembeötlünk az a dolog, hogy a fázissík jellegét meghatározó két markáns sziget a központi zárt görbék körül elfordul az óramutató járásával megegyező irányba. Először csak egy kis deformáció látható, majd a szigetek lassan „elfolynak” le- illetve felfelé. Végül, miután a kezdőfázis ismét a kiindulási értéknek felel meg, visszakapjuk az eredeti alakzatot. Azzal tehát, hogy a stroboszkópikus leképezés során folytonosan változtattuk a kezdőfázist, a fázisportrék változásával letapogathattuk a kiterjesztett háromdimenziós fázistér szerkezetét (ami természetesen  $T$  után periodikusan ismétli önmagát).

Vegyük szemügyre ismét a 3.8 ábrát, és most kövessük az 1:1-es rezonancia ( $z \approx 0.89$ ) szigetének mozgását mialatt a kezdőfázis  $2\pi$ -t változik. A szóban forgó zárt görbe  $\pi$  fázisváltozás alatt, tehát, amíg a 2:1-es rezonanciához tartozó tóruszok éppen egy negyed fordulatot tesznek meg, átkerül az átellenes oldalra, majd a következő félperiódusban visszajut a kiindulási helyére. Kicsit nehezebb követni, de ha az embernek jó a szeme láthatja, hogy a 4:3-os rezonancia, melynek négy kis sziget felel meg, 3/4 fordulatot tesz meg ugyanennyi idő alatt. Elmondható tehát, hogy különböző szigeteknek különböző a „szögsebessége” az origó körül. Egy egyszerű szabályszerűség is felfedezhető a rotációban, mégpedig minden egyes rezonancia a  $2\pi$  periódusidő olyan számú többszöröse alatt tér vissza a kiinduló pozíciójába, ahány szigetből áll. Az 1:1-es rezonancia tehát  $2\pi$  alatt, a 2:1-es  $4\pi$  alatt, a 4:3-os  $8\pi$  alatt [29].

Mielőtt térben is szemléletessé tennénk az eddig megismerteket, szánjunk néhány gondolatot a 2:1-es rezonancia szigetei körül található kisebb szigetekre. Ezek az úgynevezett *másodlagos rezonanciák* szigetei, amikre az a jellemző, hogy a főkomponensek periódusidejének és az általuk képviselt periodikus pályák periódusidejének hányadosa

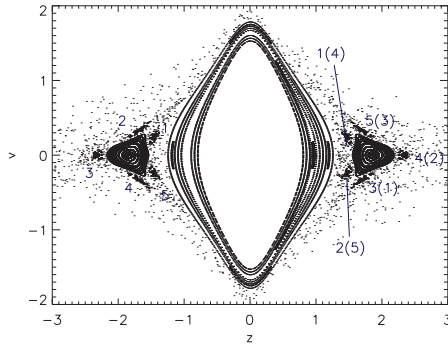
<sup>1</sup>Itt a fázis szó nem azonos a *fázistér* illetve *fázisportré* esetén használt fázis szóval. Ez egy tényleges fázis, mely azt adja meg, hogy mely pozícióban tartózkodtak a kettősök az adott időpontba.



**3.8. ábra.** 6 különböző fázisban készült metszet  $e=0.1$ -re. Az egyes panelekhez tartozó fázisok rendje a következők (a-f):  $E = 0^\circ, 63^\circ, 135^\circ, 198^\circ, 270^\circ, 333^\circ$ . Ezen az ábrán lát-szik igazán, hogy mi játszódik le a fázistérben, ha különböző időpontokban rajzoljuk fel a fázisportrét. A periodikus pályáknak megfelelő fixpontok és a körülöttük lévő tóruszok az origó körül az óramutató járásával egyező irányban elfordulnak. A 6 panel közel  $360^\circ$ -os fázisváltást követ nyomon. Ez idő alatt a  $2:1$ -es rezonancia szigetei helyet cserélnek, míg az  $1:1$ -es rezonancia ( $z \approx 0.89$ ) visszakérül az eredeti helyére. Minden egyes ciklusra jellemző egy „fordulatszám”. A konzervatív dinamikának megfelelően a szigetek terü-lete állandó, alakjuk azonban változhat úgy, hogy a trajektóriák nem metszik egymást. Kezdfeltételek:  $z_0 \in [0.8; 2.5]$ ,  $\dot{z}_0 = 0$  és  $\Delta z_0 = 0.05$ .

nem relatív primszám, viszont megegyezik a  $2:1$ -es rezonanciához tartozó értékkel. Nu-merikusan ellenőrizhető, hogy a szóban forgó kis tóruszok a  $10:5$ -ös rezonanciához tar-

tozó periodikus pályát ölelik körül. Azaz 10 főkomponens keringés alatt ötször halad át a tesztrészecske a tömegközépponton, mire egzaktul visszatér a kiindulási állapotába. Ezt a fázisportrén megismert „szigetmozgás” is alátámasztja. A 3.9 ábrán két főkomponens periódusra ( $4\pi$ ) tüntettem fel a kis szigetek helyzetének alakulását.

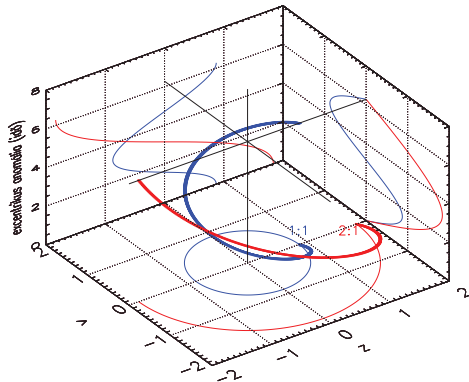


**3.9. ábra.** A másodlagos rezonanciák helyváltoztatása. A 2:1-es rezonancia jobb oldali szigetén megszámoztam a kis tóruszokat rendre 1-től 5-ig az óramutató járásával ellenkezőleg. A főkomponensek egy keringése alatt, mint az a 3.8. ábrán is látszik, a szigetek helyet cserélnék egymással. Ézalatt a számozott kis szigetek a nagyokkal együtt átvándorolnak a bal oldalra, és az ott látható számozásnak megfelelő helyet foglalják el. (A körüljárási iránya megmarad.) Majd a következő főkomponens periódus alatt visszatérnek a nagy szigettel a jobb oldalra, pozíciójukat a zárójelben lévő számok jelzik. Látható, hogy minden kis sziget két helyet jobbra ugrott. Következésképpen öt periódus után térnek vissza az eredeti helyükre, a kis szigetek a 10:5-ös **másodrendű** rezonanciának felelnek meg.

A jobb oldalon számokkal jelöltem meg az egyes tóruszokat, hogy követhető legyen a változás. A számok 1-től 5-ig nőnek az óramutató járásával ellenkező irányba.  $2\pi$  idő elteltével a kis szigetek a nagyokkal együtt átérik a másik oldalra, még hozzá úgy, hogy miközben jókora torzuláson esnek át, nem keresztezik egymás pályáját. Mintha egy csővön folynának át, amelyik a legközelebb van a cső szájához, az megy be először, majd a másik oldalon az is bukkan ki először. A következő periódusban jön egy újabb „csúszás”, és visszatérnek az eredeti helyükre, legalábbis látszólag. A zárójelben lévő számok mutatják, hogy hova is kerültek valójában. Láthatjuk, hogy a körüljárási irány megmaradt, mindegyik megtartotta a szomszédját az „utazás” során ( $2 \times 2\pi$  idő alatt), viszont

két hellyel odébb landoltak.<sup>2</sup> Kézenfekvő gondolat, hogy ha megismételnénk a folyamatot, ismét ez lenne a helyzet, vagyis 10 főkomponens periódus alatt ( $20\pi$ ) állna vissza az eredeti rend. Ezek szerint mégsem  $T$  periódussal ismétlődik a fázisportrék alakja? Erre a választ a következő bekezdések adják meg.

Egy kis képzelőerővel könnyen vizualizálhatjuk a tóruszok vándorlásának térbeli lefolyását, ha a  $z, \dot{z}$  fázisportréra merőlegesen a lap síkjából kifelé képzeljük el az idő-tengelyt. Ekkor a szigetek spirálszerűen tekeredve (mindegyik a maga ütemében) rajzolják ki a Sitnikov–probléma teljes fázisterét. Az egészet valahogy úgy lehet elképzelni, mint egy acélsodronyt, azzal az apró különbséggel, hogy az egyes elemek nem azonos vastagságúak, és különböző ütemben vannak megcsavarva. Sematikusan a 3.10 ábrán láthatjuk az 1:1-es és a 2:1-es rezonanciáknak megfelelő periodikus pályákat és vetületeiket.



**3.10. ábra.** A háromdimenziós fázistér sematikus ábrázolása. A periodikus pályáknak megfelelő fixpontok és a körülöttük lévő tóruszok (csövek) spirálszerűen csavarodnak a harmadik (idő) tengely mentén. Az ábrán az 1:1-es és a 2:1-es rezonanciáknak (utóbbinál csak a jobb oldali sziget) megfelelő trajektóriák és azok vetületei szerepelnek. A fázisportrén feltűnő szétszórt pontok a spirális csövek között átbújva, határozatlan csavarodási ütemmel elérhetik a fázistér távolabbi részeit is.

Az élet azonban nem ilyen egyszerű. Ahogy azt láttuk, a stroboszkópikus leképezéseken sem minden kezdőfeltételhez tartoznak periodikus vagy kváziperiodikus megoldások. A fázisportrékon, mint például a 3.1 ábrán, lehetnek kaotikus sávok, melyeket sűrűn (és

<sup>2</sup>Ervényesül tehát az, hogy trajektóriák nem metszhetik egymást a fázistérben. Ezenkívül szépen megfigyelhető, hogy a fázistérben egy adott térfogatelem minden további nélkül deformálódhat, de a konzervatív dinamika miatt térfogata nem változhat.

véletlenszerűen) bejár a trajektória a mozgás során. A kaotikus mozgás egy másik megnyilvánulása a rendezetlenül szétszórt pontok halmaza a metszeteken. Természetesen, ha ezeket követjük a háromdimenziós térben, folytonos trajektóriák kell, hogy legyenek. Az elképzelésem ezekről az, hogy teljesen véletlenszerű periódussal csavarodnak a szigetek között, így lehet az, hogy a leképezéseken egymástól távol eső pontokon bukkannak fel, ezzel kialakítva a szétszórt pontokat. Így el lehet képzelni azt a kuszaságot, ami egy részletgazdag fázistérben látszana (és ez még csak 3 dimenziós). Egymás körül tekerődő csövek, melyekben újabb kisebb csövek ugyancsak saját ütemükben csavarodnak. Mindezek között még vékony szálak bújálnak ide-oda. Ezek után már világos, hogy a leképezések elengedhetetlenek, hogy megértsük a fázistér összetettebb szerkezetét.

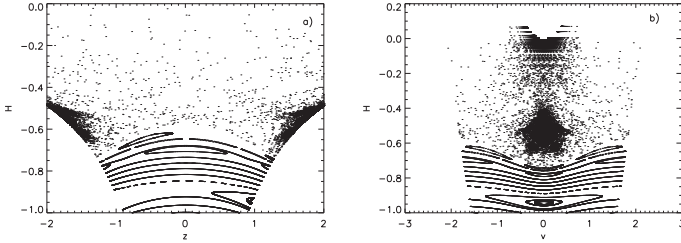
Ami pedig a másodlagos rezonanciákat illeti, az, hogy nem ugyanazok a csövek térnek vissza adott periódus után a fázisportrén a kiindulási helyzetbe, nem befolyásolja a dinamikát. Hiszen a stroboszkópikus leképezés attól még  $T$ -vel ismétlődik, a különbség csak annyi, hogy a mozgás más-más pillanataira nézünk rá  $2\pi$  periódussal. A valóságban a tóruszok nincsenek megszámozva, két egymást  $T$  idővel követő metszeten nem különböztethetők meg, ami az egyik metszeten az 1-es szigetnek megfelelő mozgás, az a másikon a 3-nak megfelelő, és így tovább, dinamikailag egyenrangú mozgás kiindulópontjai.

Áttekintve ezt a részt, elmondható, hogy a Sitnikov-probléma háromdimenziós fázissterét sikerült szemléletesen bemutatni, a benne lezajló geometriai változásokat dinamikailag is értelmezni. Ezzel megmutatva azt, hogy az egyszerű dinamikai rendszerek fázissterét lehet szemléltetni úgy, hogy annak segítségével az összetettebb problémákban már biztosabb talajon álljunk, ha éppen csak a leképezések által szolgáltatott metszetek állnak rendelkezésünkre a fázis térben.

### 3.2.1. Pillanatnyi energiafelületek

Érdekes jelenségnek lehetünk tanúi, ha a megszokott fázistér helyett más mennyiségeket mérünk fel a tengelyekre. Megtehetjük például, hogy a pillanatnyi mechanikai energiát ábrázoljuk a kitérés vagy a sebesség függvényében. Ezt mutatja a 3.11 ábra. Jól látható, hogy valami hasonló a szerkezet, mint a fázisíkokon, de valahogy mégiscsak „rendezetlenül” vannak a szigetek. Szembetűnő még az éles határ, amelyet valamilyen láthatatlan vonal tűz ki. Ezeknek az ábráknak a magyarázatát adom meg a következőkben.

Az egydimenziós gerjesztett mozgások során a gerjesztés egy fontos következménye, hogy a mechanikai energia még súrlódásmentes esetben sem marad meg. Az időfüggő gerjesztés mellett nyugalmi állapot nem érhető el, a sebesség tartósan sohasem zérus, és az energia időben állandóan változik. Nézzük meg, hogy a SP esetében ez miként írható



**3.11. ábra.** A SP Hamilton-függvénye megadja a rendszer pillanatnyi energiáját. Ennek  $H$  értékét ábrázolva a kitérés, illetve a sebesség függvényeként érdekes szerkezetű, de ismerős ábrát kapunk. (a)  $A(z, H)$  síkmetszet. (b)  $A(\dot{z}, H)$  síkmetszet. Mindkét panelen megvannak a szigetek és folytonos görbék, azonban a Hamilton-függvényből adódóan a fázisportra bizonyos részen nem lehetnek pontok.

le. A tesztrészecske Hamilton-függvénye a következő alakú a dimenziótlan probléma esetén:

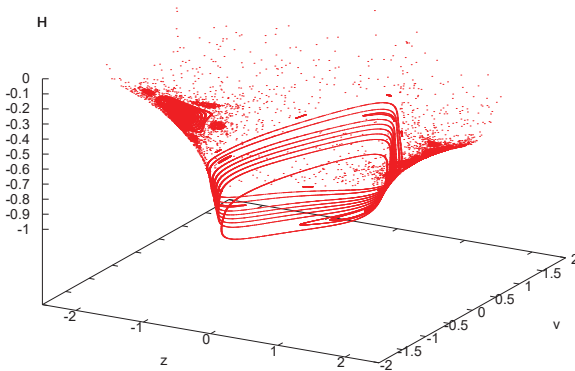
$$H(z, \dot{z}, E) = \frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{z^2 + (1 - e \cos E)^2}}. \quad (3.7)$$

Nyilvánvaló, hogy a (3.7) összefüggés a harmadik test pillanatnyi mechanikai energiáját fejezi ki, mely a gerjesztőerő hatására változik időben.

A stroboszkópus leképezés időpillanataiban a gerjesztés mindig azonos fázisú, következőképpen a leképezés *autonóm*, a leképezés alakja független attól, hogy hányadik síkmetszeten alkalmazzuk. Ezt kihasználva egy újabb szemléletes képet kaphatunk a SP fázissterének struktúrájáról.

Ha a (3.7) kifejezésben  $E$ -nek bizonyos értéket adunk, ezzel kifejezve azt, hogy a stroboszkópus metszet egy adott fázisát kiválasztottuk, és vizsgálatainkat arra koncentráljuk, akkor azt kapjuk, hogy a Hamilton-függvény már független lesz az időtől (excentrikus anomáliától). Így  $H(z, \dot{z})$ -t a pillanatnyi kitérésen és sebességen kívül a rendszer paramétere egyértelműen meghatározza. Azaz adott excentricitásérték mellett a háromdimenziós térben  $H(z, \dot{z})$  egy kétdimenziós felületet határoz meg, amely felületen a leképezés pontjai a mozgás során mindvégig rajta maradnak<sup>3</sup>. Ezt a felületet neveztem el *pillanatnyi energiafelületnek* (lásd 3.12 ábra).

<sup>3</sup> A korlátozott háromtest-problémában a tömeg nélküli égitest mozgásának lehetséges és tiltott tartományait a zero sebességű görbék (illetve térbeli esetben a zero sebességű felületek) határozzák meg. E szempontból a Sitnikov-probléma kielégítő vizsgálatát találjuk Soulis és mtsai. [45] munkájában.



**3.12. ábra.** A stroboszkópikus leképezés autonóm, ennek megfelelően az adott leképezésen a Hamilton-függvény sem függ az időtől. A pillanatnyi hely- és sebességkoordináták adott excentricitásra egyértelműen meghatározzák a pillanatnyi energiafelületet. A  $(z, \dot{z})$  pontok a stroboszkópikus metszeten mindig rajta vannak a Hamilton-függvényben általuk meghatározott kétparaméteres felületen. Az excentricitás 0.1.

A 3.12 ábra 0.1-es excentricitás mellett ötven kezdőfeltételből álló fázisportrét mutat a háromdimenziós térben. A három tengelyen rendre a hely- a sebességkoordináták, illetve a pillanatnyi energia van feltüntetve. Szembetűnő, hogy a trajektóriák nem „összevissza tekeregnek” a fázistérben,<sup>4</sup> hanem egy jól meghatározott tölcésrszerű alakzat falán helyezkednek el. Ez az alakzat éppen az adott pillanatnyi energiafelület. Mivel a pillanatnyi hely- és sebességkoordináták határozzák meg a felületet, nem csoda tehát, hogy a trajektóriák ennek megfelelően járnak be a fázisteret.

A stroboszkópikus metszetek egyes fázisaihoz tartozó Hamilton-függvényt írhatjuk a következő alakban is

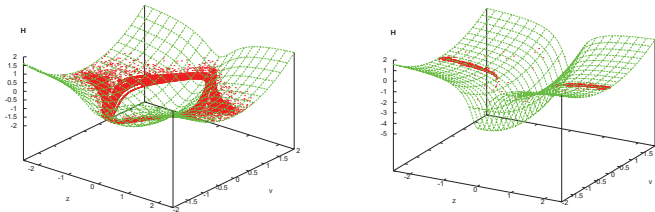
$$H(z, \dot{z})_{E,e} = \frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{z^2 + s^2}}, \quad (3.8)$$

ahol  $s$  fejezi ki azt, hogy az energiát a hely- és sebességkoordináták mellett egy állandó is meghatározza. Attól függően, hogy  $s$  mekkora értéket vesz fel, változik a felület alakja.

<sup>4</sup>Jelen esetben a háromdimenziós  $(z, \dot{z}, H)$  térre gondolok.



(3.7)-ből látszik, hogy  $s$ -et a fázis és az excentricitás határozza meg. Ha a stroboszkópikus leképezés egy más fázisát választjuk ( $s$  változik adott excentricitás mellett), természetesen akkor is érvényesek a fent elmondottak az energiafelület kismértékű „fodrozódása” mellett. Adódik a következtetés, hogy a pillanatnyi energiafelület alakja is  $2\pi$  szerint periodikus, akárcsak a SP fázistere. Egy példát láthatunk az  $E = 270^\circ$  fázishoz tartozó energiafelületre és fázisrajtektóriákra a 3.13a ábrán. Ugyanez a helyzet, ha a fázist rögzítjük és a rendszer excentricitását növeljük vagy csökkentjük. A 3.13b ábra  $e = 0.6$ -re mutatja a fázisképet.



**3.13. ábra.** A pillanatnyi energiafelület alakja függ a fázistól ( $E$ ) és az excentricitástól ( $e$ ). Az időbeli változást, azaz, ha különböző fázisokban nézzük meg a felület alakját,  $z$ -tengely irányú kis fodrozódásoknak látjuk. (a) Az energiafelület alakja  $e = 0.1$  és  $E = 270^\circ$ -re. (b)  $e = 0.57$  és  $E = 0$ . Az excentricitás növelésével mélyül a potenciálárok a  $z$  tengely mentén.

A pillanatnyi energiafelületekkel a rendszer dinamikájának egy újabb érdekes oldalát ismertük meg. Láthattuk, hogy stroboszkópikus metszeteken a Hamilton-függvény is szemléletes képet ad a rendszerre jellemző komplex fázistérstruktúráról, valamint hogy az excentricitáson kívül a főkomponensek fázisának is nagy szerepe van a fázisportrén megfigyelt struktúra kialakulásában.

### 3.3. Kilépési idők

Az előző részekben a SP fázistérének kimerítő vizsgálata zajlott, új és érdekes eredményeket adva. A következőkben egy merőben más módszert alkalmazva derítem fel a fázistér újabb és egyre titokzatosabb részeit.

Amint azt már láttuk, a fázisportrékon a szigeteken és a kaotikus sávokon kívül rendezetlenül szétszórott pontok is vannak. Ezeket a rendszerből előbb-utóbb elszökő pályáknak tulajdonítjuk. Kézenfekvő tehát a dolog, hogy meg kell vizsgálni a problémát olyan szempontból, hogy a harmadik test mennyi időt tölt el a rendszer részeként. Ez első hallásra

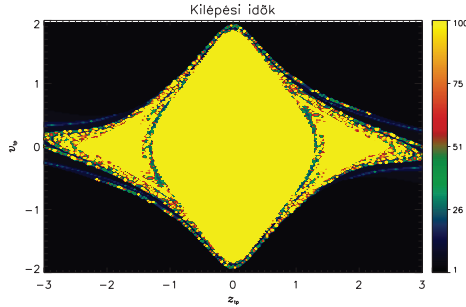
elég szabatos dolognak tűnhet, de a dolgozat további részeiben látni fogjuk, teljesen jól alkalmazható a kaotikus mozgás – különösen a tranziens káosz – leírására.

Tekintsük először az integrálható esetet ( $e = 0$ ). Ekkor a tesztrészecske három különböző fajta mozgást végezhet a kezdőfeltételek megválasztásától függően<sup>5</sup>. Olyan kezdőfeltételek esetén, melyekre  $H < 0$ , a mozgás korlátos, a fázistérbeli trajektória az origó körüli zárt görbe. Ha a kezdőfeltételeknek megfelelő  $H > 0$ , a harmadik test elhagyja a rendszert és adott sebességgel távolodik a végtelenbe. Ha a rendszer energiája nulla ( $H = 0$ ), a sebesség a végtelenben lesz zérus. Az ehhez a mozgáshoz tartozó trajektória választja el a fázistérben a korlátos és a rendszert elhagyó mozgásokat. A trajektóriák alakja is mutatja, hogy a változás a  $z$  irányban sokkal gyorsabb, mint a  $v$  irányban. Azaz, ha a tesztrészecske elhagyja a rendszert, az inkább abban nyilvánul meg, hogy távolsága minden határon túl nő a kettős síkjától, mintsem abban, hogy sebessége nőne nagyra (viszonylag kis kezdősebességgel is elhagyhatja a rendszert). Ezért, mikor egy előre kiválasztott térrészről beszélek a fázistérben, az nyugodtan jellemezhető pusztán a  $z$  irányú méretével. Ez utóbbi megállapítás az  $e \neq 0$  esetre is fennáll.

Nézzük most meg, miként írható le a dinamikai rendszer a kilépési idők segítségével. Tudjuk, hogy vannak kezdőfeltételek, melyekből korlátos mozgások erednek. Léteznek továbbá olyanok is, amelyekből elindítva a harmadik testet, az előbb-utóbb elhagyja a rendszert. Itt az *elhagyja* kifejezésen van a hangsúly. Hogyan lehetünk biztosak abban, hogy a mozgás során a test, mégha távol is kerül a fősíktól, nem fordul vissza. Erre bizonyíték nincs. Viszont az elmondható a numerikus eredmények alapján, hogy ha a fősíkhöz közeli kezdőpontból indítottuk a próbatestet, és az jelentősen eltávolodott a kettős síkjától, azután mégis visszafordul, ezt követően a kidobódás egy vagy két tömegközéppont-átmenet után feltétlenül bekövetkezik.

A 3.14 ábrán az adott  $(z, \dot{z})$  kezdőfeltételekből induló mozgásokhoz tüntettem fel a kilépési időket. Azaz minden egyes pontpárra megadtam, hogy a trajektória mikor hagyja el a  $z \in [-3; 3]$  dobozt. A sötét színek a jobb oldali palettának megfelelően az alacsony kilépési időket jelölik, a sárga felé haladva pedig egyre hosszabb ideig maradnak a trajektóriák a kiválasztott tartományon belül. A 3.14 ábra a központi stabil részt és a 2:1-es rezonanciát mutatja. A sárga területek felelnek meg az invariáns görbéknek az origó, és a rezonancia körül. A fázisportrékon megjelenő szigeteknek itt magas kilépési idő felel meg. Azaz a 100 keringésig tartó számolás során nem hagyják el a rendszert. Nézzük meg, mi történik, ha a számolási időt növeljük. A 3.15. ábrán ezer keringési ideig számoltuk a kilépési időket. Természetesen ez csak azokon a részeken okoz (esetleg) változást,

<sup>5</sup>A mozgás jellegét az összenergia előjele határozza meg



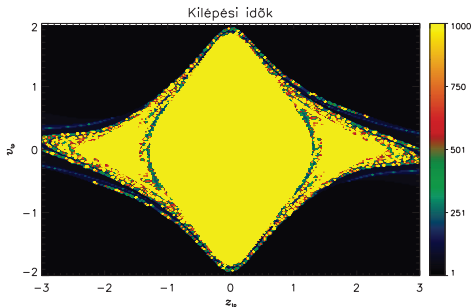
**3.14. ábra.** Kilépési idők a  $z \in [-3; 3]$  dobozból 100 keringésig (dimenziótlan egyenleteket használva egy keringés  $2\pi$ ),  $e = 0.1$  és  $E = 0^\circ$ . A sárga tartományokból indított próbatest az adott integrációs idő alatt nem hagyja el az előre megadott dobozt. Látható, hogy a fázissíkon reguláris tartományok (zárt görbék) itt a magas kilépési időknek felelnek meg, míg a szétszórt pontok a hamar elszőkő pályákat adják. A kilépési időkkel a permanens káosz nem különíthető el a reguláris részekről, hiszen a kaotikus sávokat adó trajektóriákhoz tartozó mozgás során a harmadik égitest nem hagyja el a rendszert.

ami a 100 keringést megélt pályákat tartalmazza. Látható azonban az, hogy a szigetek nem változtak, tehát azzal, hogy tízszeresére növeltük a számolási időt, a tóruszok – ahogy az várható is – megmaradtak.

Elmondható, hogy a kilépési időkkel kapott eredmények szépen egyeznek a Poincaré-metszetek, illetve a Ljapunov-kitevők által kapott eredményekkel. Van azonban egy óriási különbség. Míg az előző kettőn a permanens káosz, mint hosszú idejű kaotikus viselkedés tökéletesen rekonstruálható, addig a kilépési időknél ez nem jelenik meg, mivel a hosszú élettartam miatt a kaotikus tartományok összemosódnak a reguláris szigetekkel. Arra tehát alkalmatlan a módszer, hogy a káosz permanens jellegét kimutassa. Ettől függetlenül, mint azt látni fogjuk, igen hasznos új információkat nyerhetünk eme módszer segítségével.

A kilépési idők vizsgálata a Sitnikov–problémában nem újkeletű dolog. Rudolf Dvorak és szerzőtársainak [12] már volt egy kísérlete, hogy így kimutassák a konzervatív rendszerekben megfigyelhető „ragadósság” jelenségét a reguláris szigetek határainál<sup>6</sup>. Tekintsük az ő eredményeiket. A 3.16. ábrán a  $z \in [1.0; 3.0]$  és  $\dot{z} = 0$  kezdőfeltételekhez tartozó kilépési időket tüntettem fel. Látható az ábrán, hogy vannak részek, ahol a görbe tartósan alacsony értékeket vesz fel, és vannak úgynevezett „platók”. Könnyű be-

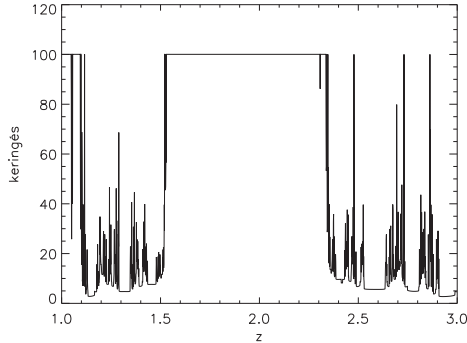
<sup>6</sup>Nevezett szerző később a jelen dolgozatban szereplő 3.4 ábrát is megalkotta kilépési időkkel.[11]



**3.15. ábra.** Ha az ábra felbontását nem változtatjuk, azonban a számolási időt növeljük, az ábra szerkezete számottevően nem változik meg. Mégpedig azért, mert a 100 keringésig megmaradó pályák java része olyan reguláris tartományhoz tartoznak, melyek mindvégig regulárisak maradnak, azaz 1000 vagy akár millió keringésnyi ideig is. Fontos azonban megjegyezni, hogy létezik olyan mozgás is, mely néhány száz, néhány ezer keringést él meg a rendszer részeként, és aztán távolodik el. Ezek azonban oly kevesen vannak (adott felbontás mellett), hogy az ábra struktúráját nem befolyásolják. Az ábrán a kilépési idők vannak feltüntetve a  $z \in [-3; 3]$  dobozból 1000 keringésre. Az excentricitás 0.1, a főkomponensek fázisa  $0^\circ$ .

látni, hogy a platók felelnek meg a reguláris szigeteknek, ahol magas a kilépési idő (sőt a próbatést az integrálási idő alatt egyáltalán nem hagyja el a rendszert). Az alacsony kilépési idők – a főkomponensek néhány keringésére – pedig a szigetek közti szétszórt pontok kezdőfeltételeihez tartoznak. A cikk szerzői a ragadósságot a szigetek falánál jelentkező egyre magasabb kilépési időkkel magyarázták, melyek során a „tüskés” szerkezet tartóját fraktál alakzatnak találták. (Erre jelen dolgozat 4. fejezetének végén még pontosabban visszatérek.) Ebből a munkából, valamint a 3.14 és 3.15 ábra szálak szerkezetéből merítettem azt az ötletet, hogy én a függőleges irányban – a  $z$ -tengellyel párhuzamos egyenes mentén – is megvizsgáltam a kilépési időket. Erre a következő igen érdekes eredményt kaptam, lásd 3.17. ábra.

Az ábrán látható egy nagy plató középen. Ez a 2:1-es rezonancia jobb oldali szigete. Itt a kilépési idők magasak, jelesül, hogy a tórusz belsejében vagyunk. Ami igazán érdekes az az, hogy ebben az irányban is megjelennek tüskés részek. Ha közelebből szemügyre vesszük ezeket a szakaszokat, látható, hogy bármennyire is nagytűntünk bele, mindig megmarad a tüskés szerkezet, 3.18 ábra. Tehát a magas kilépési időkhöz tartozó kezdőfeltételek, hasonlóan a Cantor-halmazhoz, a  $z$ -tengellyel párhuzamosan is fraktál

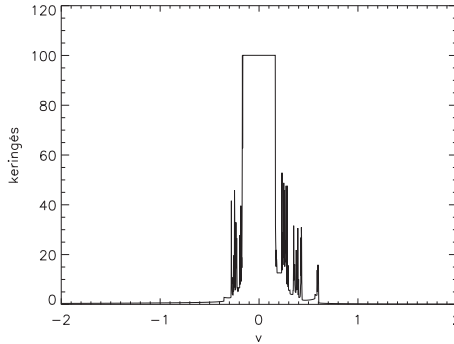


**3.16. ábra.** Kilépési idők a  $z$ -tengely mentén,  $\dot{z} = 0$ ,  $e = 0.18$ , és  $E = 0^\circ$ . Száz keringésnyi ideig követtük nyomon a mozgást. Látható, hogy a száz keringést túlélő kezdőfeltételekből induló pályák az ábrán hosszabb-rövidebb platókat rajzolnak ki. Észrevehető, hogy ezek a platók a fázissíkokon a tóruszoknak megfelelő területeken vannak. Az ábrán  $1.5 < z < 2.3$  tartományon a 2:1-es rezonancia jobb oldali szigetéhez tartozó kilépési idők adják a sima részt. Jelen van még az ábra bal oldalán az origó körüli tóruszokhoz tartozó plató egy szelete is. A reguláris részek közti „tüskés” tartományokban a kilépési idő sokkal kisebb, bár vannak magas csúcsok is nagy kilépési időkkel. Igazolható, hogy a tüskés részekhez tartozó kezdőfeltételek fraktálmalmazt alkotnak, lásd 3.18. ábra. A kezdőfeltételek  $z \in [1;3]$  voltak, és  $\Delta z = 0.0001$ . A dobozméret értelemszerűen  $z \in [-3;3]$ .

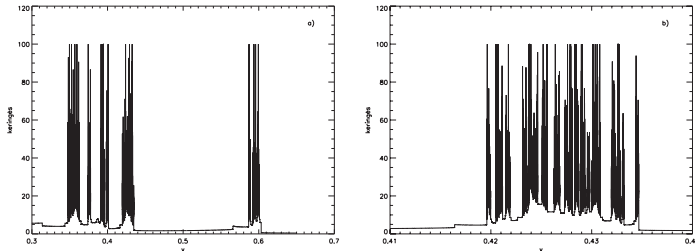
tulajdonságokat mutatnak.

Ezek után egy kicsit merészebb dolgot próbáltam. Megvizsgáltam nagyobb kitérésre is, hogy milyen eredményt adnak a kilépési idők. Ekkor természetesen a dobozméretet is növelni kell. A 3.19. ábrán ismét a függőleges tengellyel párhuzamosan végigpásztázva a fázissíkot tüntettem fel az eredményt. Számomra elég meglepő volt, hogy  $z = 8$ -nál vannak olyan kezdeti sebességek, melyek esetén a próbatest egész hosszú ideig nem szökik el. Az ábrán hasonló tüskés szerkezetet láthatunk, mint a 3.18. ábra paneljein, azonban platóknak nyoma sincs. Növelve a felbontást erről is bebizonyosodik, hogy fraktálszerű.

Ezek után már vétek lenne kihagyni, hogy az ember megcsinálja a  $(z, \dot{z})$  fázissíkon a kilépési időket nagyobb dobozméretre is, hiszen a 3.14. ábrán csak  $z = \pm 3$ -ra lett kiszámolva. Az eredményt a 3.20. ábra mutatja [29]. Azt hiszem, elég váratlan dolog, hogy még  $z = 10$ -nél(!) is vannak sárga csíkok (bár a 3.19 ábra tüskés szerkezete már árulkodott valamiről), ami azt jelenti, hogy már réges-régen távol a szigetektől, kaotikus sávoktól,

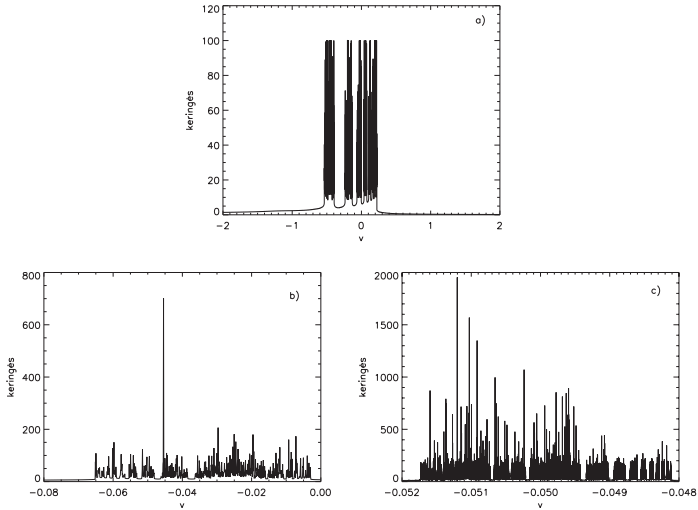


**3.17. ábra.** A  $z$ -tengellyel párhuzamos egyenes mentén ( $z = 1.5$ ) a kilépési idők. A rezonancia szigetének ismét csak egy plató felel meg, attól távolodva pedig tüskés fraktálszerkezet figyelhető meg. Látható, hogy a szigetek mellett ebben az irányban is megjelennek olyan kezdőfeltételek, melyekhez tüskés szerkezet tartozik. Természetesen itt is megmutatható, hogy fraktál tartóról van szó. Kezdőfeltételek:  $\dot{z} \in [-2; 2]$ ,  $\Delta v = 0.0001$ .



**3.18. ábra.** A 3.17. ábra felnagyított részletei. A kezdeti kitérés mindkét esetben  $z = 1.9$ . (a)  $0.3 < \dot{z} < 0.65$ ,  $\Delta \dot{z} = 10^{-5}$ . Látható, hogy a felbontás növelésével olyan kezdőfeltételek is adnak magas kilépési időket, amelyek az előző ábrán még nem szerepeltek, mert a nagyobb lépésköz miatt kimaradtak a számolásból. Az egy-két tüskéből álló csúcsok felbomlanak részletgazdagabb struktúrákká. (b)  $0.41 < \dot{z} < 0.44$ ,  $\Delta \dot{z} = 10^{-6}$ . Még nagyobb felbontás mellett már olyan pályák is adódnak, melyek száz keringésig a rendszer részéi maradnak. Bármennyire is nagyítunk bele, mindig találunk olyan kezdőfeltételt, melyből hosszú ideig „élő” mozgás indul ki. Itt látható tehát, hogy a tüskés szerkezet nem más, mint egy önmagát ismétlő alakzat, egy Cantor-halmaz.

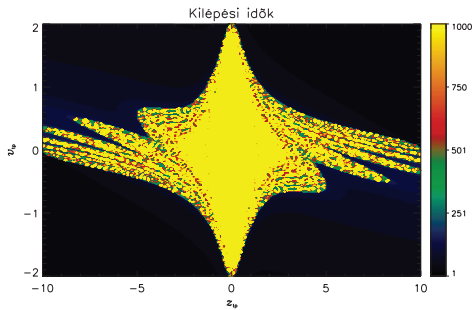
léteznek olyan kezdőfeltételek, amelyekből akár 100, 1000 vagy még több keringés is



**3.19. ábra.** Kilépési idők  $z = 8$ -nál. A dobozméret ebben az esetben  $z \in [-10; 10]$ . (a)  $\dot{z} \in [-2; 2]$  és  $\Delta\dot{z} = 10^{-4}$  Érdekes, hogy igen távol a szigetekről még mindig találhatók olyan kezdőfeltételek, melyekből induló mozgás során a harmadik test hosszú időn keresztül a rendszer része marad. (b)  $\dot{z} \in [-0.07; 0.0]$  és  $\Delta\dot{z} = 10^{-5}$ , (c)  $\dot{z} \in [-0.052; -0.048]$  és  $\Delta\dot{z} = 10^{-6}$  a fraktálszerkezet több nagyságrenden át megmarad. Látható, hogy még 1000, sőt annál több keringésig is maradnak pályák. Az excentricitás itt is 0.18.

„túlél” a részecske.

Erre a viselkedésre a magyarázatot az eddig alkalmazott módszerekkel és az azokkal kapott eredményekkel nem lehet megadni. Valami egészen más szemszögből kell vizsgálni a problémát, hogy megoldást találjunk a szinte tesztölegesen „magas” tüskékre. A 2. fejezetben említett transziens káosz elméleti alapjaira támaszkodva a fenti jelenségek tökéletesen magyarázhatók. Dolgozatom következő fejezetében erre az elméleti hátérre támaszkodva, a Sitnikov–problémán keresztül, mutatom be arra vonatkozó eredményeimet, hogy az égi mechanikában milyen fontos szerepet tölt be a transziens káosz.



**3.20. ábra.** Kilépési idők a  $(z, \dot{z})$  síkon  $z \in [-10; 10]$  dobozméretre. Az integrálási idő 1000 keringés, tehát tízszer hosszabb, mint a „metszeteken”. Megdöbbentő felfedezésnek lehetünk tanúi; a központi invariáns görbék által uralt régiótól távol is léteznek magas kilépési időnek megfelelő szálak szerkezetű tartományok. El kell tehát gondolkodnunk azon, vajon miként magyarázható az, hogy a fázistér távoli részein is megvalósulhat hosszú idejű mozgás úgy, hogy azt a Poincaré-metszetek nem fedik fel előttünk.



# 4

## Tranziens káosz az égi mechanikában

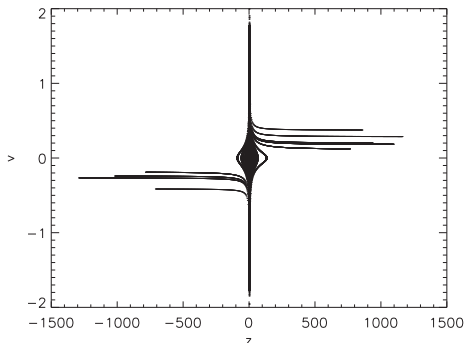
A Sitnikov–probléma vizsgálata közben a fázistérbeli szerkezet arra ösztönzi az embert, hogy a rendszert eddig nem vizsgált szemszögből szemlélje. Miért van az, hogy a stabil tartományoktól viszonylag távol is léteznek kezdőfeltételek, melyekből indítva a teszt-részecskét az hosszú ideig a rendszer része marad, és csak aztán hagyja el a kiválasztott tartományt? Milyen mozgást végez ez idő alatt a tömeg nélküli részecske? Vajon van-e köze a kaotikus sávokban megismert dinamikának, és a hosszabb rövidebb idő után a rendszert elhagyó mozgásoknak egymáshoz? Ezekre a kérdésekre és még számos más a konzervatív rendszerekben ismert jelenségekre kapjuk meg a választ, ha az adott problémát a véges idejű kaotikus viselkedés eddig megismert tulajdonságaival vizsgáljuk.

Különösen érdekes a dolog az égi mechanikában, hiszen böngészve a szakirodalmat elenyésző számú publikációt talál az ember, mely a tranziens káosszal foglalkozik. Reményeim szerint ebben a fejezetben sikerül megmutatnom, hogy mint oly sok más területén a fizikának (atomfizika, hidrodinamika) a csillagászatban is igen fontos szerep jut a véges idejű kaotikus viselkedésnek. Úgy gondolom, hogy az általam választott rendszer jól szemlélteti a módszer alapjait, és ösztönzést nyújthat komplexebb problémák vizsgálatához.

### 4.1. Szórási jelenségek

A 2. fejezetben szó esett már arról, hogy a tranziens káosz konzervatív rendszerekben szórási jelenség formájában mutatkozik meg. Úgy gondolom tehát, célszerű a Sitnikov–problémát megvizsgálni szórási szempontból, majd az eredmények tekintetében rátérni a tranziens káoszban megismert fogalmak, módszerek alkalmazására az említett rendszerben.

Láttuk, hogy egy szórási feladatban miként célszerű definiálni egyes változókat, hogy azután a probléma dinamikai természetéről kvalitatív képet kapjunk. Hogy ezt megtehes-



**4.1. ábra.** Az  $e=0.093$  excentricitáshoz tartozó fázisportré, melyen 50 kezdőfeltételből induló trajektória van feltüntetve  $t=1000$  keringésnyi ideig. Az ábra nem túl részletgazdag. Annyi látszik, hogy középen van egy sűrű „paca” amiből vízszintes vonalak indulnak ki. Ezek a vízszintes trajektóriák jelzik azokat a mozgásokat, melyek során a tesztérészecske igen messzire ( $z=\pm 1200-1500$ ) kerül a fősíktól, és lényegében elhagyja a rendszert. Amennyiben a központi vidéket ábrázoljuk csak a megfelelő léptékben, feltárul a fázistér összetettebb szerkezete is, melyet a 3.1 ábrán már megismerhettünk.

sük, nézzük meg a SP esetében miként célszerű felvenni a változókat.

Vegyük alapul a rendszer egy fázisportréját. Ezeken megfelelő ábrázolásmódban igen jellegzetes alakzatok tűnnek fel. (Nézzük például a C. Függelék fázisportréit.) Természetesen, ha minden egyes kezdőfeltételből induló trajektóriát ábrázoltunk volna 1000 keringésig, akkor egy sokkal „semmit mondóbb” ábrát (4.1 ábra) kapnánk, mert vannak olyan kezdőfeltételek, amelyek ugyan reguláris részek közelébe esnek, de a belőlük fejlődő pályákon a harmadik test elhagyja a rendszert. Azaz ebben az esetben a tesztérészecske viszonylag kis sebességgel igen messzire távolodik a fősíktól. Ezt mutatják a vízszintes tengellyel párhuzamos trajektóriák a 4.1 ábrán.

Mit jelentenek ezek a vonalak a fázistérben? Azok a trajektóriák, melyek jobbra lóganak ki, nagy pozitív értékeknél érnek véget (ekkor „jár le” az 1000 keringés), mások pedig nagy negatív értékekig érnek el, ugyanennyi idő alatt. Természetes tehát, hogy ezek azok a mozgások, melyek során a tesztérészecske igen messzire kerül a fősíktól felfelé (pozitív értékek), illetve lefelé (negatív értékek). Ha hosszabb időre integrálnánk a részecske mozgását, az csak távolodna. Végül is elmondhatjuk, hogy ezeken a trajektóriákon a tömeg nélküli test elhagyja a rendszert.

Miként lehet ebből szórási függvényt gyártani? Mindenképpen célszerű a fázistérben

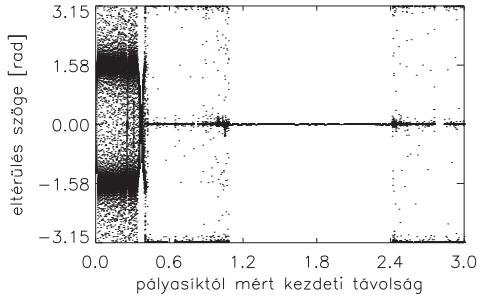
gondolkodni, ott azt hiszem, szemléletesebb a dolog. Bemeneti és kimeneti változóknak tekinthetjük az egyes trajektóriák kezdő-, illetve végpontjait. A kezdőpontok lényegében a kezdőfeltételeknek felelnek meg, a végpontok pedig számpárok a fázistér adott pontjaiban. Na már most, mi különbözteti meg a rendszert elhagyó trajektóriákat a bent maradóktól? Ha a koordináta-rendszer origóját és a végállapotokat összekötjük, definiálhatunk egy szöget, melyet a pozitív  $z$ -tengely és az összekötő egyenes zár be egymással

$$\Theta = \begin{cases} \arctan \frac{v}{z} & \text{ha } z > 0 \text{ és } v > 0, \text{ vagy } z > 0 \text{ és } v < 0, \\ -\pi + \arctan \frac{v}{z} & \text{ha } z < 0 \text{ és } v < 0, \\ \pi + \arctan \frac{v}{z} & \text{ha } z < 0 \text{ és } v > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

$\Theta$  az *eltérülés szöge*, mely  $0$  és  $180^\circ$  között változik a  $z$ -tengely felett (az óramutató járásával ellenkező irányban), míg  $0$  és  $-180^\circ$  között az ellenkező irányban. Láttuk, hogy az elsőző pályák végpontjai igen távol esnek az origótól, és mivel kidobódás után sebességük nem változik számottevően, ezért szinte párhuzamos trajektóriát adnak a vízszintes tengellyel. Tehát  $\Theta$  kidobódás esetén nulla körüli értéket vesz fel abban az esetben, ha  $z > 0$ , tehát a részecske a fősíktól felfelé hagyta el a rendszert, illetve  $\pm\pi$  értékhez közeli értéket, ha lefelé, azaz  $z < 0$ . Ezzel lényegében definiáltuk a  $\Theta(z_0, v_0)$  szórási függvényt. Azaz egy olyan kapcsolatot a bemeneti és kimeneti változók között, mely kimutatja az elsőző és a bentmaradó trajektóriákat.

Pár szót azért még kell szólni a fent bevezetett függvényről. A továbbiakban  $\Theta$  argumentumából elhagyom a  $v_0$  változót, mert minden esetben nullának választottam a kezdősebességet. (Tettem ezt azért, mert a fázisportrékat is ilyen kezdőfeltételekkel számoltam, és a további következetes összehasonlítás érdekében ez volt célravezető.) Ezenkívül meg kell még említeni, miként néz ki a szórási függvény a reguláris tartományokban. Természetesen a tóruszokhoz tartozó trajektóriák nem hagyják el a rendszert. Ennek megfelelően kétfajta viselkedése van a szórási függvénynek. Az egyik, amikor olyan kezdeti feltételeket vizsgálunk, hogy az invariáns görbék az origó körül helyezkednek el. Ekkor  $\Theta(z_0)$  folytonosan változik, és ahol kilép  $+\pi$ -nél, visszatér az ábra alján  $-\pi$ -nél. A másik eset, amikor egy sziget pontjait vizsgáljuk. Ebben az esetben az origót és a végállapotot összekötő egyenes nem forog a koordináta-rendszerben, hanem egyfajta librációt végez a szigethez tartozó maximális, illetve minimális sebességértékek között. A függvény ekkor is folytonos, csak a  $z_0$ -tengely körüli értékeket vesz fel. Természetesen minél távolabb van egy rezonancia a középponttól, vagy minél kisebb a ciklust körülölelő sziget, annál kisebb értékeket vesz fel  $\Theta(z_0)$ .

Mindezek után lássunk egy példát az elmondottakra. A 4.2 ábra a  $\Theta(z_0)$  szórási

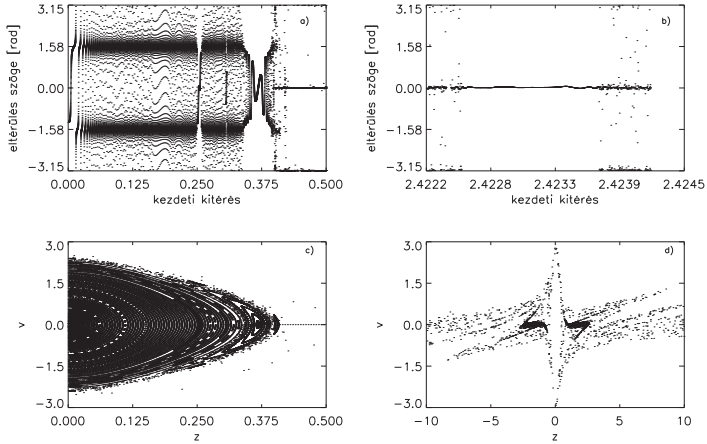


**4.2. ábra.** A Sitnikov-probléma egy tipikus szórási függvénye. A kezdőfeltételek a következők voltak:  $0 \leq z_0 \leq 3$  és  $\dot{z} = 0$ . Az excentricitás 0.57. Az ábra a  $\Theta(z_0)$  függvényt mutatja  $t = 100$  keringésre. Ahol  $\Theta(z_0)$  lassan változik, a mozgás reguláris, azokon a helyeken, ahol vadul ugrál, kaotikus.

függvényt mutatja  $e = 0.57$  főkomponens excentricitásra. A kezdeti feltételek  $z_0 \in [0; 3]$  intervallumból valók. A szórási függvény különböző viselkedése jól látható az ábrán. A központi vidék invariáns görbéi – beleértve a rezonanciák szigeteit is – jól kivethető folytonos görbét adnak a  $0 \leq z_0 < 0.4$  tartományon. Ezután következik egy olyan rész ( $0.4 < z_0 < 1.1$ ), ahol a függvény vadul változik a tipikus  $0, \pm\pi$  értékek között, annak megfelelően, hogy ezekből a kezdőfeltételekből elsőző pályák indulnak. A következő sima szakasz ( $1.1 < z_0 < 2.4$ ) a 2:1-es rezonancia jobboldali szigetének felel meg. Ez viszonylag közel esik  $\Theta(z_0) = 0$ -hoz, mivel a fixpontokat körülvevő görbék mérete függőleges irányban  $\dot{z} \approx \pm 0.05$  közé esik. A  $2.4 < z_0$  tartományon ismét a három érték ( $0, \pm\pi$ ) – és ennek megfelelően elsőző pálya – dominál.

A következőkben hasonlítsuk össze a Poincaré-metszeteket és a szórási függvényeket azonos tartományból választott kezdőfeltételek esetén. Ezzel is alátámasztva, hogy az általam választott változókkal megkonstruált szórási függvény jól jellemzi a rendszer dinamikáját a fázistérbeli szerkezetnek megfelelően. A 4.3 ábra szemlélteti az eredményt. Az *a, b* panelek látható két szórási függvény részlet (a 4.2 ábra megfelelő szakaszainak kinagyítása). A *c, d* panelek rendre a hozzájuk tartozó, tehát ugyanazokból a  $z_0$  kezdeti feltételekből eredő fázisportrék szerepelnek.

Nézzük kicsit részletesebben az összetartozó ábrákat. Az *a* panelek szépen kivethető, hogy a  $z_0 < 0.4$  tartományban a  $\Theta(z_0)$  függvény folytonosan változik. Azok a részek, melyek elhagyják a tartományt fent, belépnek lent. A *c* panel szerkezetét megnézve lát-



**4.3. ábra.** A Poincaré-metszetek és a szórási függvény összehasonlítása. Szépen látszik, hogy a metszeteken a reguláris részeket jelölő szigetekhez a szórási függvény folytonosan változó szakasza tartozik, míg a szétszórt pontokhoz tartozó kezdőfeltételeknél  $\Theta(z_0)$  a tipikus értékeket  $(0, \pm\pi)$  veszi fel.

szik, hogy a szórási függvénynek ez a része az origó körüli zárt invariáns görbéknek felel meg. Az *a* panel fent említett részén vannak olyan intervallumok, ahol a függvény nem lép ki  $\pi$ -nél hanem a vízszintes tengely közelében marad. Kézenfekvő a dolog, de ellenőrizhető is a *c* panelen, hogy ezekhez a kezdőfeltételekhez tartoznak a rezonanciák, és az őket körülvevő tóruszok ( $z_0 \approx 0.25$  az 1:2 rezonancia,  $z_0 \approx 0.37$  az 1:3 rezonancia). A szórási függvény a  $z_0 \in [0.4; 0.5]$  tartományon a már ismert tipikus értékeket veszi fel. A *c* panelen az ezeknek megfelelő kezdőfeltételekből már nem invariáns görbék erednek, hanem szétszórt pontok a fázissíkon<sup>1</sup>. Mutatva, hogy ezen trajektóriák mentén a részecske elhagyja a rendszert.

A *b* panelen látható, hogy a kezdőfeltételek egy igen kis intervallumból valók ( $2.4222 < z_0 < 2.4236$ ). Ez a szakasz a 2:1-es rezonancia jobboldali szigetéből való, és azon belül is a sziget falát alkotó külső tóruszokhoz közel eső részből. Jól látható az ábrán a jellegzetes szórási függvény sima és vadul ugráló részekkel. A folytonosan változó szakasz rendje a kváziperiodikus (vagy végtelen idejű kaotikus) mozgásnak felel meg, a

<sup>1</sup> A *c* panel a fázissík egy igen kis részét mutatja. A rendszert elhagyó pályáknak megfelelő szétszórt pontok azonban a központi vidéktől nyilvánvalóan igen távol kerülnek. Ezért van, hogy az adott tartományban a kezdőfeltételeken kívül csak kis számú pont található.

többi pedig a rendszert elhagyó pályáknak. Nézzük meg a  $d$  panelen milyen fázisport-rét rajzolnak ki a fenti intervallumból indított trajektóriák. Egy kis trükköt alkalmaztam az ábrázolásnál, mivel ha csak a  $z_0$ -nak megfelelő  $(z, \dot{z})$  síkot ábrázoltam volna (ahogy azt tettem a  $c$  panelen), nem látszana semmi a kevés pont miatt. Viszont, ha kiterjesztem a határokat  $z = \pm 10$ -ig, akkor igen érdekes jelenségnek lehetünk tanúi. Markánsan kirajzolódnak a 2:1-es rezonancia szigetei, illetve azok határai – mivel onnan valók a kezdőfeltételek. Ezenkívül láthatjuk, hogy azon pontok melyek nem részei a szigetnek, azaz elsőkö pályákat jellemeznek, valójában nem is szétszórta, hanem egyfajta struktúrát követve rendeződnek el a metszeten. Az, hogy mi lehet az a halmaz, amit az elsőkö pályák trajektóriái rajzolnak ki, a következő részben válik világossá.

Összegzésként elmondhatom, hogy a Sitnikov–probléma fázisterében definiált szórási függvény hűen tükrözi a rendszer dinamikai viselkedését. Jellemzői összhangban vannak az irodalomban tárgyalt szórási függvényekkel. Ennek alapján joggal várhatjuk, hogy a szórási függvény adta eredmények kulcsfontosságúak a végesidejű kaotikus viselkedés feltárásában.

## 4.2. A nyereghalmaz és sokaságai

A tranziens káosszal foglalkozó átfogó cikkekben, könyvekben már az első néhány bekezdésben szó esik egy, a véges idejű kaotikus viselkedésért felelős, fázistérbeli kaotikus nyereghalmazról. A dolgozat bevezető részében már említést tettem a nevezett objektumról. Szó volt arról is, hogy ez nem más, mint egy összetett fraktál, mely a nevét a hiperbolikus fixpontról (nyeregpontról) kapta. Nevezetesen, hogy minden egyes pontja körül egyik irányban összehúzódás, a másikban megnyúlás következik be. Ennek megfelelően beszélhetünk a nyereghalmaz stabil, illetve instabil sokaságáról a fázistérben, melyek külön-külön Cantor–szálas szerkezetűek. Az irodalomból kiderül az is, hogy a kaotikus nyereghalmaz nem más, mint a stabil és instabil sokaságainak metszéspontjaiból álló halmaz.

Mielőtt azonban rátérnénk a Sitnikov–probléma fázisterében lévő nyereghalmaz tüzetesebb vizsgálatára, nézzük meg, vajon voltak-e áruklódó jelek az eddigiek során, hogy létezik valami robusztusabb dolog is a tóruszokon és kaotikus sávokon kívül a fázistérben.

Először is gondoljunk vissza a probléma kilépési időkkal történt vizsgálatára. Ott is arra, amikor a dobozméret már elég nagy volt (3.20 ábra) ahhoz, hogy a központi vidékektől távolabb eső régiókban is felfedezhetők legyenek bizonyos struktúrák. Az ábrán láthatók olyan kezdőfeltételek, melyek igen távol esnek a kettős síkjától, illetve azoktól a területektől a fázistérben, ahol reguláris, vagy végtelen idejű kaotikus mozgás jellemző, és

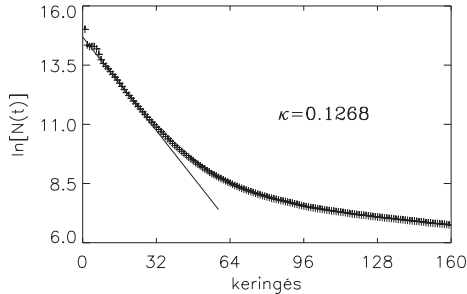
még így is legalább 1000 keringésig a rendszer részei maradnak a belőlük induló trajektóriák. Amikor metszeteket készítettem ezekről a kezdőfeltételekről, kiderült, hogy fraktál alakzatot adnak, és bármennyire is finomítjuk a felbontást, mindig lesznek kezdőfeltételek, melyekből az adott integrálási ideig (jelen esetben 1000 keringés) a mozgás során a tesztrészecske a rendszer része marad. Kérdés az, hogy mit kapunk, ha az integrálási időt és a felbontást is nagyságrendekkel megnöveljük. A válasz: a kezdőfeltételek ugyanilyen fraktál tartóját, melyen biztos, hogy léteznek a több nagyságrenddel megnövelt számítási ideig megmaradó pályák. Azaz a számítás finomításával a sárga színnel jelzett tartomány egy nullmértékű halmazra húzódik rá, ami nem más, mint a nyereghalmaz stabil sokasága.

Másodszor, az előző alfejezet végén kapott 4.3 ábra  $d$  panelje is gyanús lehet. Már csak azért is, mert összehasonlítva a kilépési időekkel (3.20 ábra), szinte magáért beszél, hogy valami köze van egymáshoz a két ábrának. Az utóbbit úgy kaptuk, hogy adott ideig (1000 keringés) követtünk nyomon a rendszerben viszonylag sok kezdőfeltételt, mégpedig főleg olyanokat, melyek elszökő mozgások eredői. Itt nem volt feltétel, hogy mikor lépnek ki egy előre meghatározott tartományból, hanem csak egyszerűen a  $(z, \dot{z})$  fázisíkot ábrázoltam. Ezért levonható az a következtetés, hogy a tömeg nélküli részecske a rendszert a fázistér egy adott halmazán hagyja el. Mintha létezne egy csatorna, amelyen távozhat a rendszerből. Ismeretes az az állítás is, miszerint a nyereghalmaz a rajta elhelyezkedő instabil periodikus pályák összessége. Ha tehát figyelembe vesszük azt, hogy egy nyeregpont körül a fázistérben az instabil sokaság mentén van jelen taszítás, akkor a 4.3 ábrán ( $d$  panel) kirajzolódó alakzat nem más, mint a nyereghalmaz instabil sokasága, ugyanis e mentén távolodnak a trajektóriák a végtelenbe, és dobódik ki a tesztrészecske a rendszerből.

A fentiekben láhattuk, hogyha kiterjesztjük vizsgálatainkat egy konzervatív rendszer fázissterében, olyan új jelenségeket tapasztalunk, melyek a tranziens kaosz jelenlétével kapcsolatosak. Adódik a gondolat, hogy a végesidejű kaotikus viselkedés elméleti hátterét feldolgozva, direkt olyan módszerekkel vizsgáljuk a problémát, hogy a tranziens jelenségek kimutathatóvá, szemléltethetővé váljanak.

A nyereghalmazt a 2. fejezetben leírt elméleti alapok segítségével határoztam meg. Ebben a részben ennek részletes bemutatása következik, néhány hasznos gyakorlati fogás részletezésével, melyek munkám elején még elég homályosak voltak, mivel tranziens kaosszal főleg disszipatív rendszerekben foglalkoznak, és az ott alkalmazható gyakorlati módszerek konzervatív esetben kissé másképp alakulnak.

Egyes rendszerekben a kezdőfeltételektől függően különböző idejű kaotikus viselkedés alakulhat ki. Ezért célszerű sok trajektóriát egyidejűleg vizsgálni, és bevezetni egy *átlagos időt* a tranziens jelenség jellemzésére. Ahhoz, hogy megtaláljuk a nyereghalmazt



**4.4. ábra.** Az előre kiválasztott  $-10 \leq R' \leq 10$  tartományban a nem elszökő pályák logaritmus az idő függvényében. A megmaradó pályák számának csökkenése a keringési idők növekedésével exponenciális. Az így kapott egyenes meredekségéből a káosz átlagos időtartama 7.88 keringés. A szimuláció során  $e = 0.57$  volt.

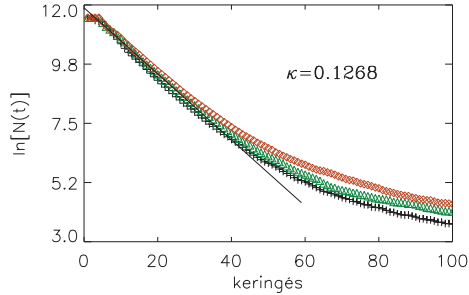
a fázistérben, először is ki kell jelölni egy megadott térrészt ( $R$ ), melyben egyenletesen szétoszorunk nagyszámú kezdőfeltételt. Ezután célszerű egy olyan dobozt<sup>2</sup> ( $R'$ ) választani, mely a rendszer karakterisztikus méreteihez igazodik.<sup>3</sup> Mindezek után csak annyi a dolgunk, hogy az  $R$ -ben elhelyezett kezdőfeltételeket elegendően hosszú időre követjük, és folyamatosan figyeljük az  $R'$ -ben bentmaradó trajektóriák számát. Azokhoz a kezdőfeltételekhez tartozik kaotikus mozgás, melyekből induló pályák elegendően hosszú ideig bentmaradnak az előre kijelölt  $R'$  tartományban (miután elhagyták a választott térrészt, a mozgás komplexitása megszűnhet). Amennyiben az  $R'$  boxban a trajektóriák csökkenése időben exponenciális, akkor a választott  $R$  térrész biztosan rajta van valahol a nyereghalmazon. Ha a csökkenés nem exponenciális, új  $R$  tartományt kell kijelölni, és ezt addig ismételni, amíg a pályák kívánt exponenciális időbeli fogyása meg nem valósul. Itt kell megjegyezni azt, hogy a pályák időbeli alakulását leíró exponenciális összefüggés a hiperbolikus dinamikára érvényes, ezért az  $R$  tartományt a tóruszoktól távol kell megválasztani. (Értelemszerűen, ha  $R$  „belelóg” egy tóruszba, akkor az ott lévő kezdőfeltételekből induló trajektóriák soha nem hagyják el  $R'$ -t, így a csökkenés sem lesz exponenciális.)

Lássuk, mindez hogy működik a gyakorlatban. Nagyjából három és fél millió kezdő-

<sup>2</sup>Néha az adott fázistérbeli tartományt az angol terminológiában használatos *box* kifejezés tükörfordításaként doboznak fogom hívni.

<sup>3</sup>Utólag visszatekintve, erre tökéletesen alkalmasak azok az ábrák, amikor kilépési időket vizsgál az ember. Mivel ott azonnal látszik, hogy mekkora tartományt kell kijelölni, ahhoz, hogy – mint azt már tudjuk – a stabil sokaság távolabbi részei is beleessenek.





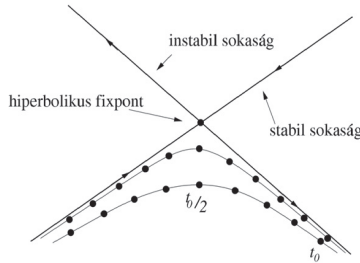
**4.5. ábra.** Különböző helyekről választott kezdőfeltételek azonos excentricitás értékre ugyanazt az átlagos időt adják. A kezdőfeltételek a fázistér következő helyeiről származnak: kereszt:  $z = 8, \dot{z} \in [-0.3; 0.3]$ ; háromszög:  $z \in [2; 4], \dot{z} = -0.6$ ; gyémánt:  $z \in [-5; -4], \dot{z} \in [-0.1; 0.1]$ .

feltételt helyeztem el a  $z \in [6; 8]$  és  $\dot{z} \in [-0.2; 0.2]$  térrészben ( $R$ ) a fázistérben. A 4.4 ábra mutatja azon pályák számának logaritmusát az idő függvényében, melyek nem hagyják el a  $z \in [-10; 10]$  tartományt ( $R'$ ). A féllogaritmikus ábrán kapott egyenes azonnal kifejezi, hogy jó helyen keresgélünk, és a nem elszököő pályák számának csökkenése exponenciális. (A görbe hátsó, az egyenestől elkanyarodó részének magyarázata a fejezet későbbi részében következik.) A 2.8 összefüggés értelmében a pontokra illesztett egyenes meredekségéből meghatározható a  $\kappa$  kilépési ráta,<sup>4</sup> valamint ebből az átlagos szökési idő ( $\tau$ ). A két mennyiségre kapott értékek a következők,  $\kappa = 0.1268$  és  $\tau = 7.886$  keringés.

Kimutatható, hogy adott problémában, adott paraméterértékek mellett a kilépési ráta invariáns mennyiség. Ezt láthatjuk a 4.5 ábrán, ahol már jóval kevesebb kezdőfeltétellel ismételt meg az előző számítást úgy, hogy a fázistér három különböző helyén vettem fel az  $R$  tartományt. Látható, hogy mindhárom esetben ugyanakkora meredekség adódik  $\kappa$ -ra.

Most, hogy van egy olyan terület, mely biztosan rajta van valahol a nyeregthalmazon – nem szükséges, hogy teljesen lefedje azt – választunk egy integrálási időt ( $t_0$ ), ami az átlagos szökési idő többszöröse (általában kettő, négyszerese), és  $t_0$  ideig követjük minden egyes az  $R$  dobozban lévő pont időfejlődését. A vizsgálat során azonban csak azokat a pályákat tartjuk meg, melyek  $t_0$  ideig *nem* hagyják el az előre meghatározott nagyobb  $R'$

<sup>4</sup> Az, hogy az egyenes nem illeszkedik az adatok második felére a tóruszok ragadósságával van kapcsolatban. Ennek magyarázatát a 4.3 fejezetben írom le bővebben.

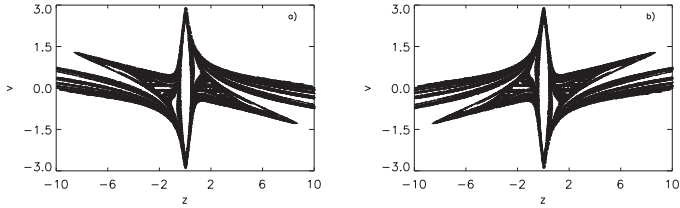


**4.6. ábra.** A nyereghalmaz numerikus szerkesztése. A hiperbolikus fixpontok stabil ágához közel eső kezdőfeltételekből induló trajektórikát végig követve, egy pontsorozatot kapunk a leképezésen.  $t_0$  integrálási idő múlva a vizsgált részecskék az instabil sokaság mentén elhagyják az előre kiválasztott térrészt a fázistérben. Mivel a nyereghalmaz a rajta fekvő instabil fixpontok összessége,  $t \approx t_0/2$  időnél lévő metszéspont lesz a legközelebb a nyereghalmaz pontjaihoz. Ebből következik, hogy az egzakt kaotikus nyereghalmazt csak végtelen számítási idő után kaphatjuk meg. A gyakorlatban azonban elég jó sok kezdőfeltételt elszórni a fázistérben, és azokból meghatározni az átlagos kilépési időt, és az ahhoz tartozó halmazt.

régiót. Ha  $t_0/\tau$  elegendően nagy érték (de nem túlságosan nagy, hogy egy trajektória se maradjon a kiválasztott térrészben), biztosak lehetünk, hogy az ilyen hosszú ideig bentmaradt trajektóriák a mozgás során közel kerülnek a nyereghalmazhoz. Ez szükségszerűen azt vonja maga után, hogy ezen trajektóriák kezdőpontja a nyereghalmaz stabil sokasága közelében helyezkedett el, illetve végpontja a nyereghalmaz instabil sokaságához esik közel, mivel a legtöbb pont  $t_0$  idő után már éppen elhagyni készül az  $R'$  dobozt. Ezeknek a trajektóriáknak a „felezéspontjai” (nagyjából  $t \approx t_0/2$ ) feltétlenül a nyereghalmazhoz közel kell, hogy essenek. Az eddig leírtakat szemlélteti a 4.6 ábra.

Általánosan megfogalmazva tehát, a legalább  $t_0$  ideig megmaradó trajektóriák kezdő-, közép-, és végpontjai jó közelítéssel a stabil sokaságot, a nyereghalmazt magát, illetve az instabil sokaságot rajzolják ki  $R'$ -ben. Mindezek után már könnyű találni egy olyan új  $R'$  tartományt, amely már az egész nyereghalmazt tartalmazza.

Nézzük meg, hogy konkrét példánk esetében milyen eredményre jutunk, ha a fenti eljárást alkalmazzuk. A kapott átlagos szökési idő ( $\tau = 7.88$  keringés) kicsivel több, mint kétszeresét véve  $t_0 = 18$  keringést kapunk. Ennyi ideig követjük az  $R$  tartományban ( $z \in [6; 8]$ ,  $\dot{z} \in [-0.2; 0.2]$ ) lévő kezdőfeltételekből induló pontokat, majd csak azokat tároljuk el, melyek 18 keringésig nem hagyták el az  $R'$  térrészt. Az eredményt a 4.7 ábrán szemléltetem.



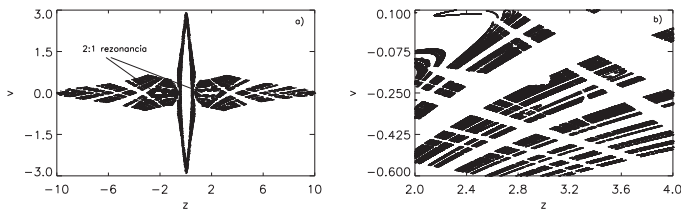
**4.7. ábra.** A kaotikus nyereghalmaz stabil (a) és instabil sokasága (b). Az instabil sokaság megkapható, ha csak azokat a trajektóriákat tartjuk meg, melyek 18 keringésig nem hagyták el még a rendszert. Ezen trajektóriák „végpontjait” (18 keringésnél a  $z, \dot{z}$  értékeket) ábrázolva kapjuk a (b) panelt. A stabil sokaság, konzervatív rendszer lévén, időben visszafelé számolva kapható ugyanezen módszerrel.

Mielőtt tüzetesebben megnéznénk a 4.7 ábra egyes paneljeit, egy dolgot még meg kell említeni. A választott  $R$  tartomány jóval kisebb, mint  $R'$ . Volt róla szó, hogy  $R$ -et úgy kell elhelyezni a fázistérben, hogy távol legyen a tóruszoktól. Lényegében a fent leírt módszer csak  $R$ -en adja meg a stabil sokaságot, mivel az  $R$ -en kívüli, de még  $R'$ -ben lévő részben nincsenek kezdőfeltételek. Ennek ellenére egy egyszerű módszerrel mégis megkapható az  $R'$ -beli stabil sokaság is. Mégpedig úgy, hogy az eredeti kezdőfeltételeket időben visszafelé integráljuk, és az  $R'$  dobozméretet vesszük alapul a bentmaradó pályák tárolásánál. Így pontosan a nyereghalmaz stabil sokaságát kapjuk.

Ezek után már teljesen világos, hogy mit is ábrázol a 4.7 ábra  $a$  és  $b$  panelje. Megnyugtató látni, hogy az  $a$  panelen lévő stabil sokaság visszadja a Cantor-szálas szerkezetű kilépési időknél kapott fázistérbeli alakzatot. A  $b$  panelen lévő instabil sokaság pedig a 4.3 ábra (d) paneljének egy részletgazdagabb változata.

Most, hogy birtokunkban van már a nyereghalmaz mindkét sokasága, nem kell mást tennünk, mint az eltárolt pályákat – melyek nem lépnek ki  $R'$ -ből – felrajzolni félidőnél ( $t \approx 9$  keringés), és megkapjuk magát a nyereghalmazt. A 4.8 ábrán láthatjuk ennek eredményét. Gyönyörűen kirajzolódik a kettős fraktál szerkezet, és nem utolsósorban összehasonlítva a 4.7 ábra paneljeivel, látható, hogy valóban a két objektum metszéspontjait kaptuk meg. Megmutatható az is, hogy a nyereghalmaz önhasonló szerkezetű, ugyanis bármennyire belenagyítva ugyanazon struktúrájú Cantor-felhőt kapjuk vissza (4.8 b ábra).

Ezzel megkonstruáltuk adott excentricitás-értékre a Sitnikov–probléma nyereghalmazát [30]. Ez önmagában már elég bizonyíték arra, hogy létezik véges idejű kaotikus viselkedés a rendszerben. Ahhoz azonban, hogy jobban megismerjük a káosz ezen formáját,



**4.8. ábra.** (a) A Sitnikov-probléma kaotikus nyereghalmaza  $z = \pm 10$  dobozméretre. Összehasonlítva a 4.7a,b paneljeit (a)-val, látható, hogy a fenti kettős metszéspontjai adják a nyereghalmazt. Numerikusan elég nehéz lenne a metszéspontokat megkeresni, ezért a nyereghalmazt úgy szerkesztjük, hogy az  $R^4$ -ben bent maradó trajektóriák pontjait  $t \approx t_0/2$  időnél elíróljuk. (Lásd 4.6 ábra.) Jelen esetben  $t = 9$  keringés. (b) A nyereghalmaz egy kinagyított részlete. A kettős Cantor-halmaz szerkezet több nagyságrenden keresztül megmarad.

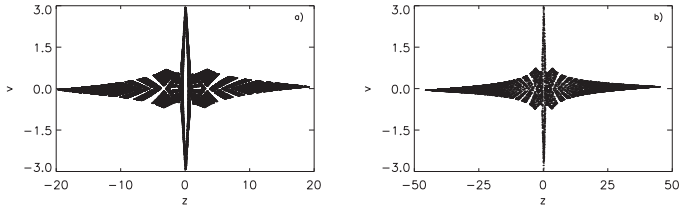
még több vizsgálatot kell tennünk, és ezen kívül nagyban hozzájárul még a megértéshez a nyereghalmaz kvantitatív elemzése is.

#### 4.2.1. A „szigetektől” távol

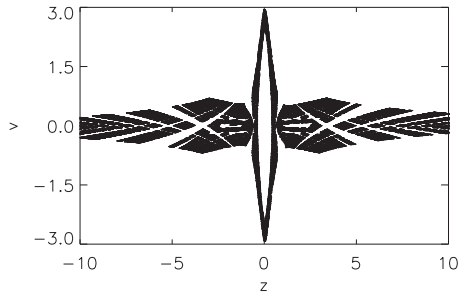
Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy mi történik, ha nagyobb területet vizsgálunk a fázistérben, mint a  $z = \pm 10$  méretű doboz. Hiszen a 4.7a ábrán tisztán látszik, hogy a stabil sokaság nem fogy el a tartomány határán, hanem nagy valószínűséggel folytatódik tovább. Ugyanez figyelhető meg az instabil sokaság esetében is. Nyilván a kettős metszetének is folytatódnia kell. A 4.9 ábrán felrajzoltam a nyereghalmazt  $z = \pm 20$  és  $z = \pm 50$  dobozméretre. Szépen látható, hogy a fő struktúra megmarad, egészen  $z \approx \pm 48$ -ig. Természetesen az integrálási időt változtatni kell, mivel nagyobb tartomány esetén a részecske ugyanazon kezdőfeltételtől indítva hosszabb ideig lehet, és lesz is a rendszer része. Ennek következtében mind a stabil, mind az instabil sokaságokhoz újabb szálak jelennek meg. Ez teljes mértékben összhangban van azzal, hogy a részecske a megnövelt tartományban a fázistér olyan részeire is eljuthat, amit eddig nem vizsgáltunk.

Természetesen a nyereghalmaz nem ér véget a fősíktól 50 egységre. A felbontás növelésével, valamint a dobozméret kiterjesztésével az objektum egyre nagyobb része tárul fel, definíció szerint a végtelenig terjed. A halmaz ráhúzódik az x-tengelyre, egyre vékonyabb lesz, ám szerkezete mindvégig fraktál marad.

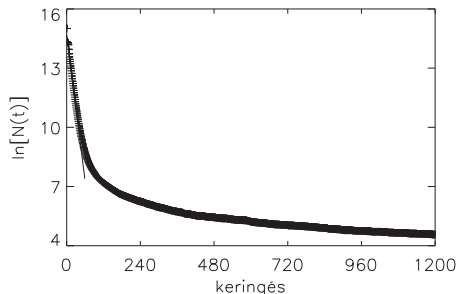
Ellenőrizhető, hogy a kiterjesztett vizsgálatok során kapott objektum, az invariáns kilépési rátának megfelelően, tartalmazza a kisebb tartományban vizsgált halmazt (4.10



**4.9. ábra.** A nyereghalmaz különböző  $R'$ -re. (a) Az előre kijelölt dobozméret  $z \in [-20; 20]$ . A halmaz felépítése nem változott, a számítási idő viszont nőtt,  $t = 32$  keringés. Ez nyilvánvaló, hiszen a harmadik test egy nagyobb tartományban hosszabb ideig tartózkodik, mint egy kisebbben. (b)  $-50 \leq z \leq 50$  dobozméret esetén még mindig jelen van a nyereghalmaz, igaz  $z \approx \pm 48$ -nál tűhegyesen véget ér. Ami természetesen nem jelenti, hogy a halmaz nincs tovább. Csupán ezzel a numerikus felbontással nem jeleníthető meg.



**4.10. ábra.** Nemcsak hogy hasonló, hanem teljesen megegyezik a két különböző méretű tartományban vizsgált nyereghalmaz szerkezete egymással. Az ábrán a  $z = \pm 10$  és a  $z = \pm 20$  dobozmérethez tartozó halmazokat rajzoltam egymásra. A különbség pusztán annyi, hogy  $z = \pm 20$  esetén újabb szálak jelennek meg a sokaságok külső felén. Ez annak tudható be, hogy a nagyobb vizsgált tartomány miatt a trajektóriák nagyobb részét járhatják be a fázistérnek, de ez szorosan kapcsolódik az instabil, illetve a stabil sokasághoz.



**4.11. ábra.** Hosszabb keringési időt vizsgálva látható, hogy a bentmaradó trajektóriák száma nem követi az exponenciális lecsengést, de ugyanakkor vannak kezdőfeltételek, melyekből indulva a harmadik égitest nem hagyja el a rendszert. Természetesen az, hogy hány trajektória tartozik egy adott keringési időhöz, függ a kezdőfeltételek számától. Ez azonban nem befolyásolja az adatok első felére illeszthető egyenes meredekségét, csak egy konstans értékkel felfelé tolja az egész grafikont.

ábra). Látható, hogy a  $z = \pm 20$ -nak megfelelő nyereghalmaz tökéletesen lefedi a  $z = \pm 10$ -hez tartozót, de függőleges irányban a „járulékos” szálak miatt szélesebb.

Összehasonlítva a permanens káosz kiterjedését a fázissíkon a nyereghalmaz méretével, levonható az az egyértelmű következtetés, hogy a véges idejű kaotikus viselkedésért felelős halmaz jóval nagyobb területen van jelen, mint a kaotikus sávok. Nem elég tehát egy konzervatív rendszerben a fázistér azon tartományaira korlátozni vizsgálatainkat, ahol a már jól ismert struktúrák (tóruszok, kaotikus sávok) jelennek meg, hanem a káosz megismert új formájának vizsgálata érdekében – új módszerekkel természetesen – nagyobb területek vizsgálatára kell törekedni.

Úgy érzem, hogy egy kis magyarázat azért még szükséges a véges idejű kaotikus viselkedéssel kapcsolatban. Számításaimat 100 keringés hosszan végeztem. Ennyi ideig követtem nyomon a pályákat, melyek szöknek el, illetve maradnak bent az előre kiválasztott régióban. Természetesen, ha hosszabb ideig vizsgáltam volna a mozgásokat, vagy több kezdőfeltételt szórtam volna el kezdetben, lennének olyan kezdőfeltételek, melyekből eredő pályák hosszabb ideig sem hagyják el a rendszert (4.11 ábra). Ez azt jelenti, hogy találhatók olyan mozgások, melyek ténylegesen igen hosszú ideig maradnak a rendszer részei, és csak aztán dobódnak ki. Érződik tehát, hogy a transziens és permanens káosz között valamiféle kapcsolat lehetséges. Erre a kapcsolatra adok magyarázatot a fejezet utolsó részében. Addig azonban nézzünk meg még néhány a nyereghalmazzal

kapcsolatos kvantitatív tulajdonságot, melyek alapján a különbségek szemléltethetők a káosz két formája között, és szerintem ismeretükben világosabban látszik majd a reláció a két viselkedéstípus között.

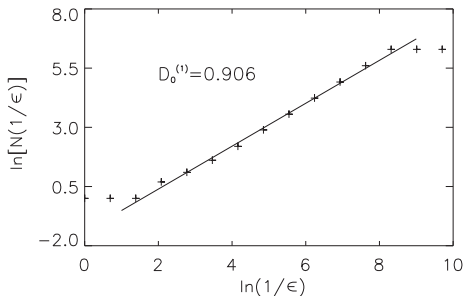
#### 4.2.2. Geometriai és dinamikai tulajdonságok

A bevezető részben kimerítően tárgyaltam a fraktálok tulajdonságait, káosszal való kapcsolátát. Láttuk azt is, hogy a jól definiált matematikai szabállyal megkonstruált fraktálok geometriai jellemzésére szolgáló mennyiség, a fraktáldimenzió, könnyen megkapható. Ha azonban egy dinamikai rendszer viselkedésével kapunk fraktálalakzatokat a fázistérben, azok dimenziójának meghatározása nem történhet egy egyszerű képlet alapján. Ezért az 1.4 fejezetben megismert módszert kell használnunk a keresett geometriai jellemző meghatározására. Ennek lényege, hogy a mérendő alakzatot lefedjük adott élhosszúságú négyzetekkel, és összeszámoljuk azokat a négyzeteket, melyek legalább egy pontját tartalmazzák a halmaznak. Ez a gyakorlatban elég bonyolult dolog. Szerencsére konzervatív rendszerrel van dolgunk, így (2.10) alapján elég csak az egyik irányba vett parciális dimenziót meghatározni, a kettős Cantor-felhő fraktáldimenziója ennek duplája lesz.

Az egyszerűség kedvéért én a stabil sokaságot – azaz a nyereghalmaz instabil irányába eső parciális dimenzióját – választottam, mert a kilépési idők felvételével ezt viszonylag részletesen meg lehet kapni. Az eljárás úgy néz ki, hogy  $z = 8$ -nál egy függőleges vonal mentén kiszámolom a kilépési időket. Ez lényegében a stabil sokaság metszete a párhuzamosan futó Cantor-szálakra merőlegesen. Majd a vizsgált szakaszt kettő (negatív) hatványainak megfelelő hosszúságú szakaszokkal fedtem le. Minden egyes hatványkitevő esetén eltérítettem azon szakaszok számát, melyekre legalább egy olyan pont esett, ahol a kilépési idő 3 keringésnél nagyobb volt. A kapott eredményt az (1.11) képletnek megfelelően a 4.12 ábra mutatja.

Tisztán látható, hogy a pontok az  $\epsilon$  felbontás több nagyságrendjén keresztül egy egyenesre esnek. A pontokra illesztett egyenes meredekségéből a  $D_0^{(1)}$  fraktáldimenzióra  $0.906 \pm 0.002$  adódik. Ez tehát az instabil irányba vett parciális dimenzió. A már említettek alapján a kaotikus nyereghalmaz fraktáldimenziója  $D_0 = D_0^{(1)} + D_0^{(2)} = 1.812 \pm 0.002$ .

A (2.10) Kantz–Grassberger összefüggés a fázistérbeli geometria és a rendszer dinamikai tulajdonságai között teremt kapcsolatot. Vagyis (2.10)-nek megfelelően, ha ismerjük a fraktáldimenziót, illetve a kilépési rátát, akkor kiszámíthatjuk a nyereghalmazon jellemző Ljapunov-kitevőt. A képletbe helyettesítve azt kaptam, hogy  $\lambda = 1.34 \pm 0.004$ . Ezzel a rendszerben adott paraméter mellett létrejövő véges idejű kaotikus viselkedés fő



**4.12. ábra.** A nyereghalmaz fraktáldimenziója. Konzervatív rendszerekben a fraktáldimenzió meghatározásához elég csak az egyik parciális dimenziót meghatározni. Számításaim során az instabil irányt – stabil sokaságot – választottam, mivel numerikusan könnyebben kezelhető. Az ábrán logaritmikus tengelyeken ábrázolva a lefedő dobozok  $N$  száma látható a felbontás reciprokának  $(1/\epsilon)$  függvényében. (1.11)-nek megfelelően az egyenes meredeksége adja a fraktáldimenziót, jelen esetben  $D_0^{(1)} = 0.906$ . A kezdőfeltételek a következők voltak:  $z = 8$ ,  $-0.5 \leq \dot{z} \leq 0.3$ .

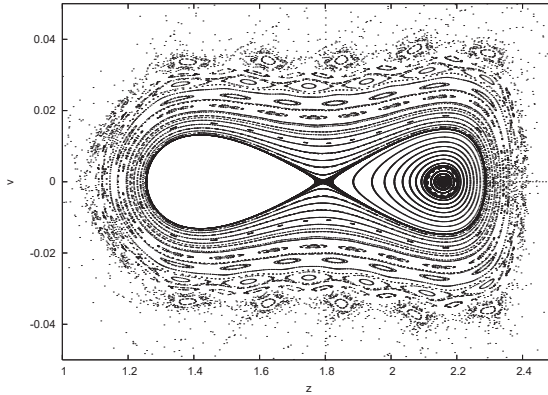
jellemzői a birtokunkban vannak. Ezeket foglaltam össze az 4.1 táblázatban.

**4.1. táblázat.** A Sitnikov–probléma nyereghalmazának kvantitatív tulajdonságai adott excentricitás-értékre ( $e = 0.57$ ).

$\kappa$ (kilépési ráta)	$0.1268 \pm 0.005$
$\lambda$ (Ljapunov–kitevő)	$1.34 \pm 0.03$
$D_0$ (a nyereghalmaz fraktáldimenziója)	$1.812 \pm 0.002$

A pozitív Ljapunov–kitevők a mozgás dinamikáját jellemezve arról adnak számot, hogy mennyire instabilak a pályák, azok szétartása mennyire exponenciális a fázistérben. Nézzük meg, hogy a permanens káosz kaotikus sávjában milyen értékeket kapunk. 0.57-es excentricitásra egy markáns kaotikus sáv alakul ki nyolcas-alakban körülvéve a 2:1-es rezonancia szigeteit. Itt elvégezve a számításokat az adódott, hogy átlagosan a Ljapunov–exponensek értéke  $\lambda = 0.0035 - 0.004$  [30], vagyis nagyságrendekkel kisebb, mint a halmazhoz tartozó érték. Ezzel egy újabb, a dolgozat elején általam elhallgatott jelenségre kaptuk meg a választ. Ha visszalapozva megnézzük a 3.2 ábrát, láthatjuk, hogy a kontúrképen a kaotikus sávok narancssárga színnel jelennek meg, míg a szigetek körüli szétszórt pontok, melyekről már tudjuk, hogy a rendszerből idővel elszökő pályáknak felelnek meg, citromsárga színnel. Már ebből is látszik, hogy két-három nagyságrendnyi





**4.13. ábra.** A 2:1-es rezonancia jobb oldali szigete. A Ljapunov-kitevőket a nyolcas alakban húzódó kaotikus sávban számoltam 5 különböző kezdőfeltételre. Az integrálási idő  $t = 1000$  keringés, az excentricitás 0.57 volt. Az exponensek értéke  $\lambda = 0.0035 - 0.004$ .

különbség van az értékek között, de ott akkor még nem tudtam volna megindokolni a különbséget, ezért nem tettem említést a dologról.

Elmondható tehát, hogy egy rendszerben a tranziens káosz robusztusabb, és sokkal inkább érzékeny a kezdeti feltételek megválasztására, tehát nehezebben jósolható előre, mint a permanens káosz. Ezzel még egy érvet állítottunk amellé, hogy egy rendszer dinamikai vizsgálata során nem szabad figyelmen kívül hagyni a véges idejű kaotikus viselkedést, hiszen az jellemzőbb tulajdonsága a problémának, mint a végtelen idejű adott térrészbe korlátozott „társa”.

### 4.3. Ragadósság

Elérkeztünk a dolgozat legfontosabb alfejezetéhez. Már láttuk, hogy egyszerű égi mechanikai rendszerben a permanens káosz mellett a véges idejű kaotikus viselkedéssel is igen erőteljesen kell számolni. Láttuk, hogy Hamilton-rendszerekben a tranziens káosz megnyilvánulási formája a kaotikus szórás. Ennek okán megismerkedtünk az elszökő pályák számának exponenciális csökkenésével, mint a tranziens káosz egy lényeges feltételével. A nyeregthalmaz tulajdonságait feltárva világossá vált, hogy a káosz új megnyilvánulási formájáért is az instabil periodikus pályák a felelősek. Nézzük meg most azonban az eddig kissé háttérbe szorult tóruszok szerepét a kaotikus mozgás szervezésében.

Ismert, hogy a konzervatív rendszerek fázisterében az instabil periodikus pályák végtelen halmaza mellett stabil mozgások is léteznek, melyek közelében a mozgás korlátos. Ezek a pályák a külső pontok számára elérhetetlen tartományban vannak. A reguláris mozgásokhoz tartozó pályák a fázis térben elliptikus fixpontokat vesznek körül, és KAM-tóruszokkal határoltak. A korlátos mozgások halmazát a szórási trajektóriáktól a legkülső KAM-tórusz határolja el. A szórási trajektóriák közül jónéhány a fázis térbeli bolyongása során közel kerülhet a „vízvázasztó” KAM-tórusz falához, és ott viszonylag sok időt eltölthet, mielőtt elhagyja a rendszert. Ha ezekre a pályákra összpontosítunk tehát, azt találjuk, hogy egy előre megadott tartományból a kilépő trajektóriák száma nem exponenciálisan csökken az idővel, hanem hatványtörvényt követ. A bentmaradó trajektóriákra megismert (2.8) összefüggés az alábbi új alakot ölti

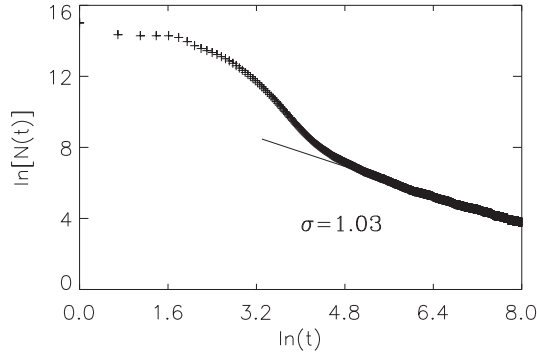
$$N(t) \approx t^{-\sigma}, \quad (4.2)$$

ahol  $\sigma$  egy pozitív kitevő.

A hatványtörvény igazolására tekintsük a 4.14 ábrát. Visszalapozva a 4.4 ábrához láthatjuk, hogy az adatok első fele – nagyjából 40 keringésig – szépen illeszkedik az egyenesre, melyből a kilépési ráta, illetve az átlagos kilépési idő megkapható. A hosszabb integrálási idők felé haladva azonban az illeszkedés elromlik, és az adatsor „lekanyarodik” az egyenesről. Ha most ugyanannak a számolásnak az eredményeit mindkét tengelyén logaritmikus rendszerben ábrázoljuk, akkor a 40 keringés feletti értékekhez tartozó adatok ismét csak egy egyenesre illeszkednek. Ez a viselkedés éppen elég bizonyíték, hogy belássuk, a pályák számának csökkenése ekkor nem exponenciális, hanem hatványtörvényt követ. Mégpedig olyat, ahol a  $\sigma$  állandó értéke 1.03 (4.14 ábra).

A trajektóriák ezen lassú bomlása a KAM-tóruszok *ragadósságát* fejezi ki, és igen gyakran kaotikus szórás alkalmával figyelhető meg. Ez egy nagyon fontos megállapítás, és tudomásom szerint égi mechanikai problémában én mutattam ki először. Ezzel nem azt akarom mondani, hogy a csillagászok körében teljesen ismeretlen a jelenség. Ellenkezőleg. Számtalan cikk született a ragadós pályákból, valamint a jelenség vizsgálatából<sup>5</sup>, de ezek közül egyikben sem utaltak a szerzők arra, hogy a vizsgált jelenségnek bármi köze is lenne a transziens káoszhoz. Márpedig van, és ez szépen látszik a következő ábrán is (4.15 ábra). Az *a* panelen egy látszólag ártatlan kezdőfeltételből indított trajektóriát tüntettem fel. Viszonylag magasról kis kezdősebességgel indítva a tesztreszcskét az megközelíti

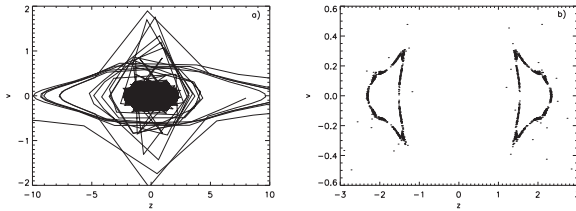
<sup>5</sup>Itt megjegyezném azonban, hogy annak ellenére, hogy égi mechanikai szaktalpokban jelentek meg a publikációk, java részt a Standard-leképezéssel foglalkoztak a szerzők. Egyetlen olyan munkáról van tudomásom, ahol a ragadósságot „valós” dinamikai rendszerben vizsgálták, és az is a Sitnikov-probléma volt [12].



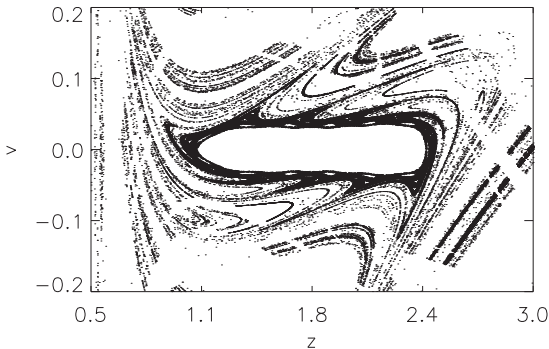
**4.14. ábra.** Azok a trajektóriák, melyek megközelítik a tóruszok falát sokkal hosszabb időt töltenek a rendszerben, mint azok, melyek nem kerülnek elég közel hozzájuk. A pályák számának csökkenése a keringési idő függvényében ekkor nem exponenciális, hanem hatványtörvényt követ. A jelenség a KAM-tóruszok „ragadóssága”. A 4.4 ábra adatait ábrázoltam logaritmikus koordináta-rendszerben [30], és a hosszabb keringési időknél illesztve egyenest, meghatároztam  $\sigma$  kitevő értékét,  $\sigma = 1.03$ .

a szóró objektumokat, jelen esetben az egymás körül keringő kettőst, majd rendezetlen mozgás után kibőbodik a rendszerből, és egyenletesen folytatja útját, mintha mi sem történt volna. Látható, ahogy  $P_3$  a  $-3 \leq z \leq 3$  tartományba érve a 2:1-es rezonancia szigeteit körbejárva csaknem kétezer keringésnyi időt tölt el a rendszer részeként (3.19 c ábrán a legmagasabb tüske), míg végül távozik. Megjegyzendő, hogy ilyen kezdőfeltételt nagyon nehéz találni. Ugyanis, ha kiválasztunk egy tartományt, ott rengeteg olyan pálya van, mely nem marad sokáig a rendszer része. Pusztán a véletlen, illetve a sok próbálkozás műve, hogy sikerült találnom egy 2000 keringésig a fősík közelében maradó mozgást. A felbontás finomításával esélyünk természetesen nő hasonló kezdőfeltételek lokalizálására, de a számítási pontosság határt szab vizsgálódásainknak. A jobboldali panelen ugyanaz a Poincaré-metszet látható, csak az egymás után következő pontokat a leképezésen nem kötöttem össze vonallal. Kitűnően látszik, hogy a trajektória a periodikus pályákat körülvevő legkülső tórusz falához ragadva járja be a fázisér ezen részét, és egy a kaotikus sávokhoz hasonló, térkitöltő alakzatot rajzol ki.

A fent említettekkel összhangban van azonban még egy látványos geometriai következménye annak, hogy a ragadósság szoros kapcsolatban áll a kaotikus szórással. Mivel a külső KAM-tórusz falánál már nem beszélhetünk a pályák számának exponenciális csök-



**4.15. ábra.** Egy tipikus ragadós pálya fázistérbeli mozgása. (a)  $z = 8$  és  $\dot{z} = -0.0512024800000047$  kezdőfeltételből indított trajektória pontjainak vándorlása a fázissíkon ( $e = 0.18$ ). Az egyes pontokat összeköttem, hogy jól látszódjék, a mozgás során a trajektória igen sok időt a szigetek körül tölt el, majd elhagyja a rendszert. (b) Pontokkal ábrázolva ugyanaz. Szépen kivehető, amint a rezonanciákat körülvevő kaotikus sávot kitöltik a fázissíkon véletlenszerűen ugráló pontok.



**4.16. ábra.** A nyereghalmaz és a 2:1-es rezonancia szigetét körülölelő kövér fraktál ( $e = 0.57$ ). A nyereghalmaz egyre sűrűbb és sűrűbb lesz, míg végül egy kétdimenziós kaotikus sávra nem válik.

kenéséről, a kaotikus nyereghalmaz igen sűrű ezekben a régiókban. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a 2.12 összefüggésben  $\kappa \rightarrow 0$ , és ennek következtében  $D_0 \rightarrow 2$ . Azaz a nyereghalmaz egyre sűrűbb és sűrűbb lesz, míg végre egy térkitöltő objektummá, egy kövér fraktállá nem válik (4.16 ábra).

Ez tehát nem kevesebbet jelent, mint hogy létezik egy finom átmenet a legkülső KAM-tórusznál a fraktál szerkezetű kaotikus nyereghalmaz (tranzien káosz) és a kaotikus sáv között (permanens káosz) [49].

# 5

## Záró gondolatok

Dolgozatom célja az egyik legegyszerűbb égi mechanikai rendszer numerikus vizsgálatán keresztül bemutatni a dinamikai rendszerekben fellépő kaotikus viselkedés sokrétűségét, fontosságát. A Sitnikov–probléma kellően egyszerű ahhoz, hogy a konzervatív rendszerekben jelenlévő bonyolultabb mozgások szemléletesen jelenjenek meg a fázistérben. Mint azt már korábban is említettem, úgy vélem, hogy igazán megérteni a káoszt kis szabadsági fokú rendszereken végzett numerikus számításokkal lehet. A 3. fejezetben ismertetett vizsgálataim a probléma fázistérének egy új, általános képét adják. Rámutattam arra, hogy a gerjesztett rendszerek fázistere kiterjeszthető a külső erő fázisának függvényében, ami ekvivalens azzal, hogy a rendszert explicite időfüggő differenciálegyenlet írja le. Ekkor a fázistér különböző síkjai stroboszkópikus leképezés segítségével teljes mértékben feltérképezhetők.

A fázistér vizsgálatával eltöltött viszonylag hosszú idő során olyan kérdések is felmerültek bennem, melyek azután jóval messzebbre vezettek, mint a reguláris és kaotikus tartományok feltérképezése, vagy az egyes fázisportrék szerkezetének változása az idővel. Világossá vált, hogy a harmadik tömeg nélküli részecske nem véletlenszerűen hagyja el a rendszert, illetve marad benn rendkívül hosszú ideig. Kimutattam, hogy jól meghatározott kezdőfeltételek rajzolnak ki szálal fraktál alakzatokat a fázistéren, melyekhez igen hosszú „túlélés” tartozik. Ezek után szinte már természetesnek adódott, hogy valami hasonló alakzat tartozik az első két pályák kiindulópontjaihoz is.

Ez inspirált arra, hogy olyan számítógépes programot írjak, mellyel tanulmányozható egy rendszerben a véges idejű kaotikus viselkedés. A numerikus számítások lehetővé tették, hogy az általánosan, elméletileg már ismert kaotikus nyereghalmazt a Sitnikov–problémára is meghatározzam, ezzel bizonyítva, hogy az égi mechanikában is jelen van a káosz ezen fajtája. Igyekeztem magyarázatot adni arra is, hogy miként alakulnak ki a sokat vizsgált ragadós pályák. És ezzel el is jutottam dolgozatom egyik legfontosabb,

és talán eddig megválaszolatlan részéig. Itt ugyanis felerül a kérdés, hogy lehetséges-e valamiféle kapcsolat a tranziens és a permanens káosz között.

Láttuk, hogy a tranziens jelenségekért felelős nyereghalmazt a szökési ráta ( $\kappa$ ), illetve az abból kapható átlagos szökési idő ( $\tau$ ) határozza meg. Megfelelő algoritmussal megszerkeszthető az adott átlagos szökési időhöz tartozó fraktálhalmaz a fázistéren. Ennek dimenziója valahol 1 és 2 között van, megegyezve azzal, hogy nem térkitöltő alakzatról van szó. Megmutattam azt is a 4. fejezetben, hogy ha jóval hosszabb integrálási időre vizsgáljuk a rendszert, mint  $\tau$ , akkor már nem lesz érvényes a bent maradó pályák számának exponenciális csökkenése, hanem hatványtörvény szerinti fogyást mutatnak. Érdekes, hogy ezzel a fázistérbeli geometria is megváltozik. A hosszú ideig a rendszer részét képező mozgásokhoz tartozó trajektóriák a fázistérben a reguláris tartományok határát képező legkülső tóruszok falához közel kerülhetnek, és *tetszőlegesen* hosszú időt tölthetnek el a falhoz ragadva, míg végül elkalandoznak tőle, és elhagyják a rendszert. A *tetszőlegesen* hosszú időt szó szerint kell érteni. Bár gyakorlatilag szerintem kivitelezhetetlen, de léteznek olyan kezdőfeltételek, melyekből indítva a részecskét éppen olyan trajektóriát „kapunk el”, mely a KAM-tóruszok közelébe kerül, és véglegesen odaragad. Azaz, ott egy kétdimenziós, kaotikus sávot sűrűn bejárva már a permanens káosz megtestesítője lesz a végtelenségig. Hogy ez miért lehetetlen? Mert ahhoz, hogy ekkora szerencsénk legyen, éppen a kaotikus nyereghalmazt felépítő végtelen sok hiperbolikus fixpont egyikét kellene kiválasztanunk kezdőfeltételnek. Ezek a pontok pedig nullmértékű halmazt alkotnak a fázistéren. Ennek persze nem mond ellent az általam felrajzolt nyereghalmaz. Hiszen a 4. fejezet ábráin az adott szökési időhöz tartozó fraktál látható. Ami pedig, amint a neve is mutatja, egy átmeneti, tranziens jelenség. Tehát semmiképpen sem hivatott a hosszúidejű, ragadós pályák kimutatására. Az ember persze próbálkozhat olyan kezdőfeltételleket találni, melyek minél hosszabb „életbenmaradást” biztosítanak a tesztrészecskének. Ennek igazából csak a számbázis pontosság szab határt. Nekem egy közel kétezer keringést megélő trajektóriát sikerült találnom, mivel a számbázis ezt tette lehetővé.

Ezek után persze adott a dolog, hogy ha a tranziens káosz (vagy konzervatív rendszerekben inkább kaotikus szórás) ilyen robusztusan jelenik meg a dinamikai rendszerekben, akkor nem hanyagolható el a vizsgálata más összetettebb rendszerek esetében sem, melyeknek talán nagyobb a gyakorlati haszna. Azonban még mindig tartom azt a nézetemet, hogy lassan kell haladni a bonyolultabb rendszerek felé, azért a Sitnikov-probléma további vizsgálata mellett ígéretes munka lehet Hénon és Petit [41] munkájának felelevenítése, melyben bolygók holdjainak mozgását tanulmányozták. A több mint húsz éve született cikkükben a kaotikus mozgás felelősenek már a fázistér egy részhalmazát tulaj-

donítják. Az akkori kor számítástechnikai lehetőségei viszont még nem tették lehetővé a nyeregthalmaz megszerkesztését.

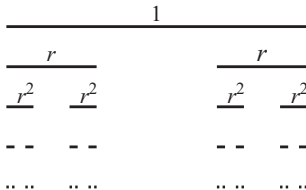
Ha már elfogadottá, és rutinszerűvé válik az égi mechanikában is a tranziens káosz fontossága, akkor a ma oly népszerű exobolygó-rendszerekre is alkalmazhatjuk. Hiszen ezek nagy része a központi csillag körül keringő egy vagy két óriásbolygó rendszere, melyekre alkalmazhatjuk a korlátozott három- vagy többtest-problémát.



# A

## Fraktáltípusok

A fraktálok egy fontos osztályát alkotják az egzaktul önhasonló alakzatok. Ezeknek nemcsak kis részletei hasonlítanak egymáshoz, hanem egyben az egészhez is hasonlóak. Jellegzetes példa az ún. Cantor-halmaz. Ezt úgy kapjuk, hogy az egységintervallumból először a két szélső  $r < 1$  hosszú szakaszt tartjuk meg, majd ugyanilyen arányú kivágást végzünk a megmaradt  $r^2$  stb. hosszú szakaszokon (A.1. ábra). Mivel az  $\varepsilon = r^n$  hosszú



**A.1. ábra.** A Cantor-halmaz szerkesztésének első öt lépése  $r = 0.3$  paraméter mellett. A kész halmaz dimenziója  $D_0 = 0.576$ .

szakaszokkal történő lefedéshez szükséges szakaszok száma  $2^n$ , a lefedő intervallumok száma  $N(\varepsilon) = \varepsilon^{\ln 2 / \ln r}$ ,<sup>1</sup> és ebből (1.10) alapján egyszerűen következik a fraktáldimenzióra a

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln(1/r)} \quad (\text{A.1})$$

<sup>1</sup> A lefedéshez szükséges intervallumok (dobozok) száma a megfigyelt kerülettel a következő összefüggésben áll:  $K(\varepsilon) = \varepsilon N(\varepsilon)$ , tehát a lefedő intervallumok száma megszorozva azok hosszával. A Cantor-halmaz hossza  $K(\varepsilon) = 2^n r^n$ , hiszen  $2^n$  darab  $r^n$  hosszúságú szakasszal fedhető le.  $K(\varepsilon)$ -t tovább alakítva kapjuk, hogy  $K(\varepsilon) = 2^{\ln \varepsilon / \ln r} \varepsilon = \varepsilon^{1 + \ln 2 / \ln r}$  a második egyenlőség egyszerű számítással belátható:  $\ln(2^{\ln \varepsilon / \ln r}) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln r} \ln 2 = \frac{\ln 2}{\ln r} \ln \varepsilon = \ln(\varepsilon^{\ln 2 / \ln r})$ . A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt az argumentumok megegyeznek.  $N(\varepsilon)$ -ra megkapjuk tehát a fenti eredményt.

összefüggés. A Cantor-halmaz nem alkot folytonos görbét, hanem egy szétszórt pontthalmaz, mely végtelen sok pontból áll. Dimenziója ennek megfelelően kisebb, mint egy.

A fraktáloknak létezik egy másik igen fontos csoportja, melyekben a fraktálok mintegy részekre bonthatók. Erre két példát mutatok, az első a Cantor-szálak esete (A.2 ábra). Ezt az alakzatot úgy kapjuk meg, hogy az egységnégyzet egyik oldala mentén kivágunk



**A.2. ábra.** A Cantor-szálak szerkesztésének menete. Nem egy vonalból, hanem egy egység oldalú négyzetből indulunk ki, megfelelő  $r$  szélességű és egységnyi magasságú oszlopokat meghagyva. Ha a kapott halmazt egy vízszintes vonallal elmetsszük, éppen egy  $r$  paraméterű Cantor-halmazt kapunk. Az ábrán  $r = 0.4$ , és  $D_0 = 1.756$ .

egy téglalapot úgy, hogy a megmaradó oldalból két  $r$  vastagságú rész marad. Így két egységnyi magas  $r$  vastagságú téglalapot kapunk. A következő lépésben ugyanilyen módon vágunk ki darabokat a meglévő egységnyi magasságú és egyre vékonyabb téglalapokból. A végeredmény végtelen sok párhuzamos egységintervallum halmaza, melyeket vízszintesen elvágva egy  $r$  paraméterű Cantor-halmazt kapunk. A Cantor-szálak együttese az egységintervallum és az  $r$  paraméterű Cantor-halmaz *direkt szorzata*.

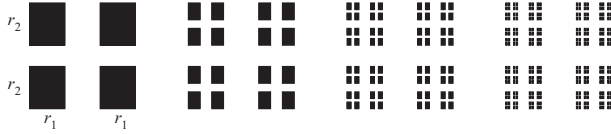
A Cantor-szálak dimenziójának meghatározása a következőképpen történik: ha  $\varepsilon = r^n$  élhosszúságú négyzetekkel akarjuk lefedni az alakzatot,  $2^n$  darab oszlopot kapunk. Minden egyes oszlop  $1/\varepsilon$  darab négyzetet tartalmaz (mivel az egységnyi hossz  $\varepsilon$  felbontással való lefedéséhez  $1/\varepsilon$  darab szakasz kell)<sup>2</sup>. A lefedő dobozok száma ezért  $N(\varepsilon) = \varepsilon^{(\ln 2 / \ln r - 1)}$ . A Cantor-szálak dimenziója tehát

$$D_0 = - \left( \frac{\ln 2}{\ln r} - 1 \right) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/r)}, \quad (\text{A.2})$$

azaz eggyel nagyobb a Cantor-halmazénál.

Második példának tekintjük az aszimmetrikus Cantor-felhöket (A.3 ábra). Ezek úgy szerkeszthetők meg, ha az egységnégyzet közepéből egy olyan keresztet vágunk ki, hogy utána négy  $r_1$  szélességű és  $r_2$  magasságú téglalap maradjon vissza. Majd a kivágási szabályt ismétljük minden egyes téglalapra. Ez lényegében annyit jelent, hogy a vízszintes mellett most függőlegesen is képezünk egy  $r_2$  paraméterű Cantor-halmazt. A két,

<sup>2</sup>Például egy egyméteres rúd 10cm-es egységekkel való lefedéséhez  $1/0.1 = 10$  darab egység szükséges.



**A.3. ábra.** Az aszimmetrikus Cantor-felhő szerkesztésének első néhány lépése  $r_1 = 0.3$  és  $r_2 = 0.4$  paraméterek mellett. A szerkesztés során az egységnégyzet közepéből úgy vágunk ki kereszteteket, hogy a visszamaradt téglalapok oldalhossza  $r_1$ , illetve  $r_2$  legyen.  $D_0 = 1.331$ .

egyenes szakaszba ágyazott fraktál összevetítésével kapott összetett fraktál dimenzióját úgy kapjuk, hogy minden irányban a lefedéshez szükséges minimális dobozok számának szorzata adja az alakzatot minimálisan lefedő összes dobozok számát. Fennáll tehát az  $N(\epsilon) = N^{(1)}(\epsilon)N^{(2)}(\epsilon)$  összefüggés. Mindegyik  $N^{(i)}$  a hozzá tartozó fraktál  $D_0^{(i)}$  dimenziója szerint növekszik, azaz  $N^{(i)}(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_0^{(i)}}$ . Ezek összevetítéséből kapjuk, hogy  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_0^{(1)}} \epsilon^{-D_0^{(2)}}$ , a teljes fraktáldimenzió tehát

$$D_0 = D_0^{(1)} + D_0^{(2)}. \quad (\text{A.3})$$

Az összetett fraktálok dimenziója az egyes összetevők dimenzióinak összege. Az egyes komponensek  $D_0^{(i)}$  dimenzióit szokás *parciális dimenzióknak* is nevezni. Ezek ismeretében tehát az aszimmetrikus Cantor-felhő fraktáldimenziója

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln(1/r_1)} + \frac{\ln 2}{\ln(1/r_2)}. \quad (\text{A.4})$$

Az imént láttuk, miként szerkeszthetők a fraktálok főbb típusai. Természetesen egy dinamikai rendszer fázissterében a mozgásegyenletekből következő kaotikus viselkedés esetén is a fraktálok ezen pár alaptípusával találkozunk. Ezek azonban nem reprodukálhatók olyan könnyen, mint a tökéletesen önhasonló társaik. Fraktáldimenziójuk nem kapható egyszerű képletek segítségével. A kaotikus mozgással kapcsolatos fraktáلالakzatok a fázis térben a rendszer saját belső tulajdonságaiból következnek. Mivel az egyenletek nem oldhatók meg analitikus módszerekkel, ezért a geometriai alakzatok sem írhatók le egyszerű szabályokkal. Mérhető tulajdonságaikat – mint például fraktáldimenziójukat – numerikus számításokkal kapjuk.

# B

## Hatás- és szögváltozók bevezetése

Mint azt már láttuk a 2. fejezetben, a konzervatív rendszerek mozgása mindig jellemezhető egy Hamilton-függvénnyel. A függvény változói a  $\mathbf{q}$  koordináták,  $\mathbf{p}$  impulzusok, és az idő. A rendszert a szabadsági fokoknak megfelelően  $2N$  darab elsőrendű differenciálegyenlet írja le (2.1). Súrlódásmentes rendszerekben érvényes a Liouville-tétel is, miszerint a fázistér fogat a mozgás során állandó marad, függetlenül attól, hogy a rendszer gerjesztett-e vagy sem.

A következőkben részletesebben – matematikailag precízebben – tárgyalom a hatás- és szögváltozók bevezetését.

A kanonikus transzformáció alkalmával, olyan új változókat vezetünk be, melyekkel a (2.1) egyenletek a megoldás szempontjából kedvezőbbek lesznek.

Tekintsünk egy  $F$  függvényt, mely a régi  $\mathbf{q}$  és az új  $\mathbf{q}'$  koordináták és az idő függvénye:  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t)$ . Ekkor a kanonikus transzformáció egyenletrendszere a

$$\mathbf{p} = \partial F / \partial \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}' = -\partial F / \partial \mathbf{q}' \quad (\text{B.1})$$

alakot ölti. Az  $F$  függvény a transzformáció *generátorfüggvénye*. Mivel az  $F$  függvény a régi és az új koordináták függvénye, ezért *vegyesváltozójú* generátorfüggvénynek nevezik. A transzformáció után az új Hamilton-függvényre kapjuk, hogy

$$H' = H + \partial F / \partial t. \quad (\text{B.2})$$

Az új kanonikus egyenletek előnye, hogy az új Hamilton-függvény egyszerűbb alakja megkönnyítheti a megoldást. Ha például az új  $H'$  Hamilton-függvény nem függ a  $q'_i$  koordinátától, akkor  $\dot{p}'_i = 0$ , a  $p_i$  változók időben állandók, a rendszer egy mozgásállandóját képezve. Ha  $H'$  egyáltalán nem függ  $\mathbf{q}'$ -től, akkor a rendszer azonnal integrálható.

Ennél is egyszerűbb a helyzet, ha találunk olyan generátorfüggvényt, hogy  $H' \equiv 0$

legyen. (B.2) szerint ennek az a feltétele, a generátorfüggvényt  $S$ -sel jelölve, hogy

$$H + \partial S / \partial t = 0 \quad (\text{B.3})$$

legyen. Az eredeti Hamilton-függvényben  $\mathbf{p}$  helyére a  $\partial S / \partial \mathbf{q}$  kifejezést helyettesítjük, a keresett kanonikus transzformáció generátorfüggvényére kapunk egy egyenletet:

$$H(\partial S / \partial \mathbf{q}, \mathbf{q}, t) + \partial S / \partial t = 0. \quad (\text{B.4})$$

Ez a *Hamilton–Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet*.

Legyen a Hamilton–Jacobi-egyenlet egy teljes megoldása  $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ , ahol  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  tetszőleges állandók. Az így kapott  $S$  függvénnyel a kanonikus transzformáció

$$\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{q}, \quad \beta = \partial S / \partial \alpha, \quad (\text{B.5})$$

ahol a második egyenletcsoportban a negatív előjel elhagyható, mert az új  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{p}$  változók szerepét az  $\alpha$  és  $\beta$  tölti be. Mivel ezekre olyan kanonikus egyenletek állnak fenn, melyekben a Hamilton-függvény azonosan nulla, így mind  $\alpha$ , mind  $\beta$  állandók. Ezért ezeket *kanonikus állandóknak* is nevezik, és úgy tekinthetők, mint  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{p}$  változók kezdőértékei.

Autonóm rendszer esetében a Hamilton-függvény értéke megegyezik a rendszer  $E$  összenergiájával. (B.4) alapján

$$S = -Et + S_0(\mathbf{q}). \quad (\text{B.6})$$

Ezt visszahelyettesítve (B.4)-be kapjuk a *rövidített Hamilton–Jacobi-egyenletet*:

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = E. \quad (\text{B.7})$$

A hatás- és szögváltozók speciális kanonikus változók, melyek időfüggetlen, szeparálható, periodikus Hamilton-függvény esetén vezethetők be. Előnyük, hogy a rendszer frekvenciái igen könnyen a mozgásegyenletek integrálása nélkül számolhatók, valamint a fázisér szemléletesen írható le [15].

Egy időtől független Hamilton-rendszer rövidített Hamilton–Jacobi-egyenlete akkor szeparálható, ha az

$$S_0 = \sum_{i=1}^n S_i(q_i, \alpha) \quad (\text{B.8})$$

feltevéssel  $n$  számú közönséges differenciálegyenletre bomlik. Az  $\alpha$  konstansok a Hamilton–Jacobi-egyenlet teljes megoldásában szereplő kanonikus állandók, melyekre érvényes a következő összefüggés:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = E. \quad (\text{B.9})$$

$\alpha$  helyett más konstansok is használhatók, így bevezethetők a *hatásváltozók*.

A  $\mathbf{J}$  hatásváltozót a következő összefüggéssel definiáljuk

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p} d\mathbf{q}. \quad (\text{B.10})$$

A körintegrál arra utal, hogy  $\mathbf{p}$  impulzust a  $\mathbf{q}$  koordináta egy teljes periódusára kell integrálni. (B.5)-t figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q}. \quad (\text{B.11})$$

Ezt a  $\mathbf{q}$  koordináta teljes ciklusára integrálva  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\alpha)$  kifejezést kapjuk. A hatásváltozók  $\alpha$ -hoz hasonlóan állandók. Az előbbi összefüggésből kifejezhetjük az  $\alpha$  állandókat a hatásváltozókkal:  $\alpha = \alpha(\mathbf{J})$ . Ezt (B.8)-ba helyettesítve egy új  $S^* = S^*(\mathbf{q}, \mathbf{J})$  generátorfüggvényt kapunk.

Vezessük be a  $\theta$  szögváltozót a

$$\theta = \frac{\partial S^*}{\partial \mathbf{J}} \quad (\text{B.12})$$

összefüggéssel. Kimutatható, hogy  $\theta_i$  értéke  $q_i$  egy periódusa alatt  $2\pi$ -vel nő, és  $\theta_i$  nem változik  $q_k$  koordináta változásakor.

A kanonikus egyenletekben a  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  változókról a  $(\theta, \mathbf{J})$  változókra a

$$\mathbf{p} = \partial S^*(\mathbf{q}, \mathbf{J}) / \partial \mathbf{q}, \quad \theta = \partial S^*(\mathbf{q}, \mathbf{J}) / \partial \mathbf{J} \quad (\text{B.13})$$

transzformációval térhetünk át.  $S^*$  egy vegyesváltozójú generátorfüggvény, azaz a hatás- és szögváltozókra kanonikus egyenletek lesznek érvényesek. Mivel  $S^*$  független az időtől (B.3) következtében az új Hamilton-függvény megegyezik a régivel, mely (B.9) következtében csak a hatásváltozóktól függ.

A hatás- és szögváltozókkal felírt kanonikus egyenletek:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H^*(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} = \omega(\mathbf{J}), \quad \dot{\mathbf{J}} = -\frac{\partial H^*(\mathbf{J})}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Ezek az egyenletek azonnal integrálhatók, és a megoldás alakja:

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0 = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \theta = \omega(\mathbf{J})t + \theta_0, \quad (\text{B.15})$$

ahol  $\mathbf{J}_0, \theta_0$  állandók, és a szögváltozók az idő lineáris függvényei. A megoldásoknak megfelelően a rendszer frekvenciái által meghatározott mozgás a fázistérben tóruszfelületen zajlik, ahogy azt már a 2. fejezetben is láttuk.

# C

## A Sitnikov–probléma fázisportréi

A Sitnikov–problémának egyetlen paramétere van, a kettős excentricitása. Ettől függően lehet integrálható ( $e=0$ ), vagy nem–integrálható a rendszer. A következő két ábra részletesen mutatja a fázissík változását az excentricitás függvényében.

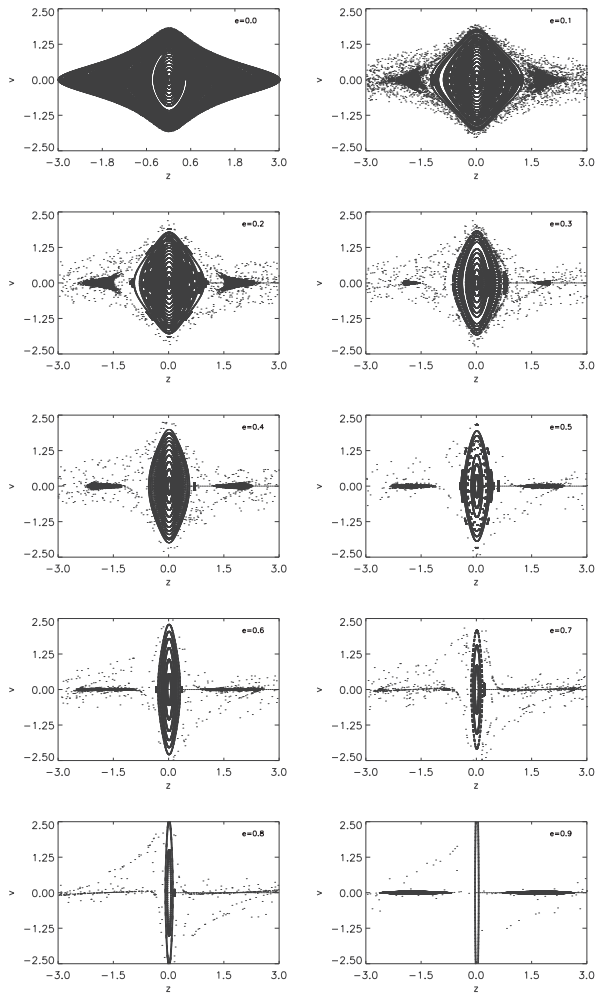
A C.1 ábrán a fázisportré egy nagyobb szeletét ábrázoltam, feltüntetve a központi stabil helyzet ( $z = \dot{z} = 0$ ) körüli invariáns görbéket, valamint a 2:1-es rezonancia két oldalt megjelenő markáns szigeteit. Ez utóbbiak fejlődését részletesebben a C.2 ábra mutatja. Fontos még megjegyezni, hogy a fázisportrék a főkomponensek pericentrum-átmenetéhez tartoznak, ami a témába vágó összes publikációban bevett szokás.

Mint az ismeretes, egy dinamikai rendszerben a paraméterek változásával a fázistér szerkezete sem marad állandó. Az ábrán is szembetűnő, hogy minél nagyobb a kettős excentricitása, annál kisebb a központi reguláris rész. Ez érthető is, hiszen minél nagyobb az excentricitás, a harmadik test annál közelebb kerülhet az egyes tömegközéppont-áthaladásokkor a főkomponensekhez, így a rá ható erőhatás is nagyobb. Ennek következtében könnyebben összeszedhet annyi energiát, hogy elhagyja a rendszert. Így tehát a központi reguláris rész egyre csökken a főkomponensek pályájának elnyúlásával.

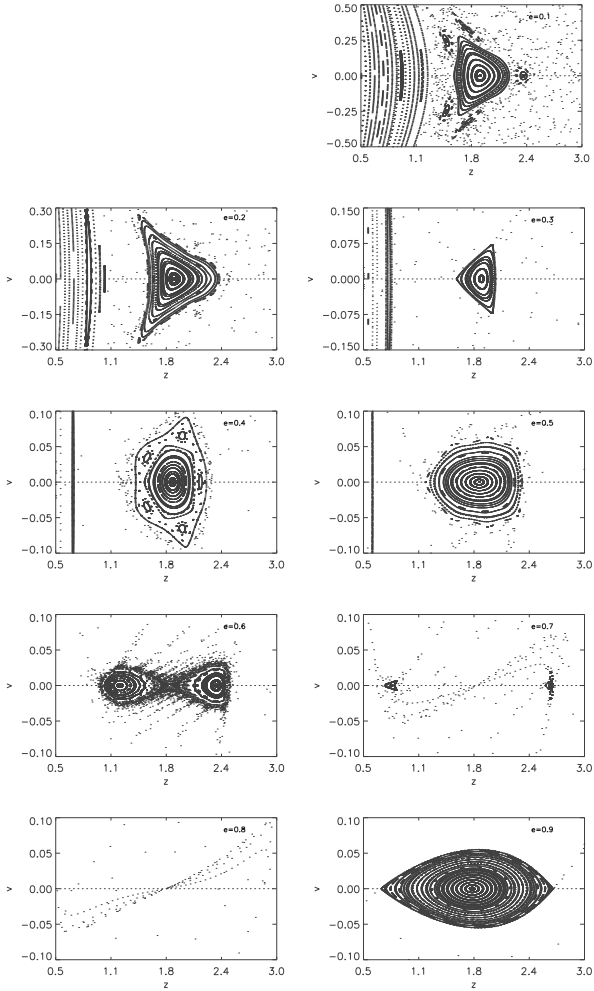
A kétoldalt megjelenő szigetek mutatják, hogy a 2:1-es rezonancia „külön életet él”. Az excentricitás változásával a szigetek mérete is változik. Ezt igen jól nyomonkövethetjük a 3. fejezet 3.4 ábráján is. A C.2 ábrán jól látszik a rezonancia szerkezetének változása az excentricitással. Nagyjából  $e=0.544$ -nél van egy bifurkációs pont. Ekkor a rezonanciának megfelelő stabil fixpont instabillá válik, és tőle jobbra, illetve balra megjelenik két új elliptikus pont. Az excentricitás növekedtével a szigetek eltűnnek, ahogy történt az már  $e \approx 0.25$ -nél is. Majd  $e=0.9$ -nél ismét markánsan jelen vannak.

A Sitnikov–probléma fázistérének érdekes részletei tárulnak fel, ha a főkomponensek más-más helyezeteinél vizsgáljuk az egyes fázisportrékat. Ezzel a témakörrel foglalkozik részletesebben a dolgozat 3. fejezete.





**C.1. ábra.** A Sitnikov-probléma fázisportréja abban az esetben, mikor a főkomponensek a pericentrumban vannak. A kezdőfeltételek a következők:  $z \in [0; 3.0]$ ,  $\dot{z} = 0$ ,  $\Delta z = 0.05$ . Az excentricitás balról jobbra, fentről lefelé növekszik.



**C.2. ábra.** A 2:1-es rezonancia jobb oldali szigete az excentricitás változásával. Az egyes fázisportrék ismét a főkomponensek pericentrum-átmenetéhez tartoznak. A kezdőfeltételek ugyanazok, mint a C.1 ábránál.

## Irodalomjegyzék

- [1] <http://exoplanets.eu>.
- [2] J. M. Alfaro and C. Chiralt. Invariant rotational curves in Sitnikov's problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 55:351–367, 1993.
- [3] V. I. Arnold. Small denominators II.: Proof of a theorem by A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally-periodic motion under a small perturbation of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surveys*, 18:9, 1963.
- [4] S. Bleher, C. Grebogi, and E. Ott. Bifurcation to chaotic scattering. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 46:87–121, 1990.
- [5] S. Bleher, E. Ott, and C. Grebogi. Routes to chaotic scattering. *Physical Review Letters*, 63:919–922, 1989.
- [6] H. G. Bock. Numerical treatment of inverse problems in chemical reaction kinetics. In Ebert et al., editor, *Modelling of Chemical Reaction Systems*, Series in Chemical Physics, pages 102–125, Heidelberg, 1957. Springer.
- [7] G. Contopoulos. Resonance cases and small divisors in a third integral of motion. I. *Astronomical Journal*, 68:763–779, 1963.
- [8] G. Contopoulos. Periodic and 'tube' orbits. *Astronomical Journal*, 70:526–544, 1965.
- [9] G. Contopoulos, N. Voglis, Ch. Efthymiopoulos, C. Froeschlé, R. Gönczi, E. Lega, R. Dvorak, and E. Lohinger. Transition Spectra of Dynamical Systems. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 67:293–317, 1997.

- [10] R. Dvorak. Numerical results to the Sitnikov-problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 56:71–80, 1993.
- [11] R. Dvorak. The Sitnikov problem – A Complete Picture of Phase Space. In F. Szenkovits and B. Érdi, editors, *Publication of the Astronomy Department of the Eötvös University*, 19, page 129, Cluj Napoca, May 2006. Babes–Bolyai University, Cluj University Press.
- [12] R. Dvorak, G. Contopoulos, Ch. Efthymiopoulos, and N. Voglis. „Stickiness” in mappings and dynamical systems. *Planetary and Space Science*, 46:1567–1578, 1998.
- [13] B. Eckhardt. Irregular scattering. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 33:89–98, 1988.
- [14] Ch. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, and N. Voglis. Cantori, Islands and Asymptotic Curves in the Stickiness Region. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 73:221–230, 1999.
- [15] B. Érdi. *A Naprendszer dinamikája*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.
- [16] S. B. Faruque. Solution of the Sitnikov problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 87:353–369, 2003.
- [17] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Chaotic Attractors in Crisis. *Physical Review Letters*, 48:1507–1510, 1982.
- [18] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, 7:181–200, 1983.
- [19] M. C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics (Interdisciplinary Applied Mathematics)*. Springer-Verlag, New York, USA, first edition, 1990.
- [20] J. Hagel. A new analytic approach to the Sitnikov problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 53:267–292, 1992.
- [21] J. Hagel and Ch. Lhotka. A High Order Perturbation Analysis of the Sitnikov Problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 93:201–228, 2005.
- [22] M. Hénon and C. Heiles. The Applicability of the Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments. *Astronomical Journal*, 69:73–79, 1964.

- [23] G.-H. Hsu, E. Ott, and C. Grebogi. Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. *Physics Letters A*, 127:199–204, 1988.
- [24] C. Jung and H. J. Scholz. Cantor set structures in the singularities of classical potential scattering. *Journal of Physics A*, 20:3607–3617, 1987.
- [25] C. Jung and H. J. Scholz. Chaotic scattering of magnetic dipole. *Journal of Physics A*, 21:2301–2311, 1988.
- [26] J. Kallrath, R. Dvorak, and J. Schödlér. Periodic orbits in the Sitnikov problem. In Dvorak R. and Henrard J., editors, *The Dynamical Behaviour of our Planetary System; Proceedings of the Fourth Alexander von Humboldt Colloquium on Celestial Mechanics*, page 145. Kulwer Academic Publishers, 1997.
- [27] J. Kallrath, J. Schloeder, and H. G. Bock. Least squares parameter estimation in chaotic differential equations. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 56:353–371, 1993.
- [28] H. Kantz and P. Grassberger. Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 17:75–86, 1985.
- [29] T. Kovács and B. Érdi. The extended phase space of the Sitnikov problem. *Astronomische Nachrichten*, 328:801–804, 2007.
- [30] T. Kovács and B. Érdi. Transient chaos in the Sitnikov problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 2009. under publishing.
- [31] J.-C. Lai, C. Grebogi, R. Blümel, and M. Ding. Algebraic decay and phase-space metamorphoses in microwave ionization of hydrogen Rydberg atoms. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 45:8284–8287, 1992.
- [32] Y. T. Lau, J. M. Finn, and E. Ott. Fractal dimension in nonhyperbolic chaotic scattering. *Physical Review Letters*, 66:978–981, 1991.
- [33] J. Liu and Y.-S. Sun. On the Sitnikov Problem. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 49:285–302, 1990.
- [34] R. S. Mackay, J. D. Meiss, and I. C. Percival. Stochasticity and transport in Hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 52:697–700, 1984.
- [35] W. D. MacMillan. An integrable case in the restricted problem of three bodies. *Astronomical Journal*, 27:11–13, 1911.

- [36] J. D. Meiss and E. Ott. Markov-tree model of intrinsic transport in Hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 55:2741–2744, 1985.
- [37] J. Moser. On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, 1:1, 1962.
- [38] J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems*, volume 77 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, first edition, 1973.
- [39] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, first edition, 1993.
- [40] E. Ott and T. Tél. Chaotic scattering: An introduction. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 3:417–426, 1993.
- [41] J. M. Petit and M. Henon. Satellite encounters. *Icarus*, 66:536–555, 1986.
- [42] H. C. Plummer. *An introductory Treatise on Dynamical Astronomy*. Dover Publication, New York, 1960.
- [43] W. H. Press. *Numerical Recipes In C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1992.
- [44] K. Sitnikov. The existence of oscillatory motions in the tree-body problem. *Dokl. Akad. Nauk.*, 133:647–650, 1960.
- [45] P. Soulis, T. Bountis, and M. Leftaki. Regular and chaotic dynamics in sitnikov’s circular 3-body problem. In *1st International Conference "From Scientific Computing to Computational Engineering"*, Athens, 2004.
- [46] Y.-S. Sun, L.-Y. Zhou, and J.-L. Zhou. The Role of Hyperbolic Invariant Sets in Stickiness Effects. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 92:257–272, 2005.
- [47] G. Tancredi, A. Sánchez, and F. Roig. Comparison between methods to compute the Lyapunov exponents. *Astronomical Journal*, 121:1171–1179, 2001.
- [48] T. Tél and M. Gruiz. *Kaotikus dinamika*. Universitas – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, Hungary, 2002.
- [49] T. Tél and M. Gruiz. *Chaotic Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, first edition, 2006.

- [50] D. K. Umberger and J. D. Farmer. Fat fractals on the energy surface. *Physical Review Letters*, 55:661–664, 1985.
- [51] K. Wodnar. New formulations of the Sitnikov Problem. In A. E. Roy, editor, *Predictability, Stability, and Chaos in N-body Dynamical Systems*, page 457, New York, 1991. Plenum Press.

# Összefoglalás

Dolgozatomban a Sitnikov–probléma numerikus vizsgálatán keresztül igyekszem bemutatni az egyszerű dinamikai rendszerekben fellépő komplex mozgástípusokat. Célkitűzésem, hogy az említett rendszer fázisterének részletes feltérképezésével bemutassam a konzervatív problémákra jellemző kaotikus viselkedés sokrétűségét, különös tekintettel a tranziens jelenségre, melynek égi mechanikai alkalmazása a mai napig elég szegényes. Rövid elméleti bevezetés után a 3. fejezetben kap helyet a Sitnikov–probléma fázisterének stroboszkopikus leképezéssel történő feltárása. Ebben a részben mutatom be a gerjesztett rendszerekre jellemző kiterjesztett fázistér szerkezetét, magyarázatot adva a fázissíkok különböző metszeteiken megjelenő struktúrájára. A rendszer dinamikai viselkedésének egy új oldalról való megközelítése a kilépési idők vizsgálatának módszere. Ennek során a fázistérnek olyan új részleteit mutatom be, melyekre magyarázatot kizárólag a véges idejű kaotikus viselkedés megértésével remélhetünk. A 4. fejezet a tranziens jelenségekkel kapcsolatos eredményeimet tartalmazza. Az általam definiált szórási függvény tulajdonságain keresztül részletesen tárgyalom a véges idejű kaotikus mozgás konzervatív esetét. Ebben a részben kap még helyet a fázistérben jelen lévő, és a véges idejű kaotikus mozgás szervezéséért felelős halmaz – a kaotikus nyeregthalmaz – kvantitatív és kvalitatív vizsgálata. Ebből a legfontosabb levonható következtetés az, hogy a tranziens káosz robusztusabb dinamikai tulajdonságokkal bíró mozgások megtestesítője, mint a reguláris tartományok közelében megfigyelhető permanens káosz. A fejezet harmadik fő pillére a ragadós pályák vizsgálata. Ennek során mutatom be azokat az eredményeimet, melyekből arra lehet következtetni, hogy a tranziens káosz valamiféle kapcsolatban lehet a permanens káosszal. Záró gondolataimban igyekszem megmagyarázni eme feltételezés elméleti hátterét, ugyanakkor rávilágítok a probléma gyakorlati korlátaira is.



# Summary

In my thesis I have investigated the complex motions appearing in simple dynamical systems via numerical methods. The aim of the work is to demonstrate the features of chaotic motion in conservative systems, especially in consideration of the transient phenomenon, since its application is quite poor in celestial mechanics. In the first two chapters I have described a short theoretical review about the investigated system (the Sitnikov problem) and chaotic behaviour in frictionless problems. Section 3 contains the results of the investigation of the extended phase space of the Sitnikov problem. I give a detailed picture about the phase space of the problem explaining the cause of diverse structures of the phase portrait at different times (or different phases of the primaries). A new aspect to describe the behaviour of the investigated problem is the method of escape times. By the help of this method one can find regions in the phase space where unknown behaviour appears. To understand this, it is worth to study the theory of transient phenomenon in dynamical systems. I present my results that belong to long lived chaotic motions in Chapter 4. The scattering function is created firstly. I show that this method characterizes the dynamical behaviour of a system as well as the Poincaré Surfaces of Sections. Besides this I have calculated an important object in the phase space that is responsible for the final time chaotic behaviour, namely the chaotic saddle. The quantitative and qualitative properties of this set are studied thoroughly. The main consequence of the simulations is that the transient chaos is more robust than the permanent chaos. In the third, main part of the chapter the stickiness effect is described. Numerical investigations show that there may be a link between the final time chaotic motions and motions that are restricted in chaotic bands (i.e. permanent chaos). In the fifth chapter, besides a short summary, I explain this supposed relationship.

# Publikációs jegyék

## Referált folyóiratban megjelent cikkek

1. Borkovits, Tamás; Bíró, Imre Barna; Kovács, Tamás: "New CCD Times of Minima of Eclipsing Binary Systems" *Information Bulletin on Variable Stars*, **5206**, 1. (2001)
2. Borkovits, Tamás; Bíró Imre, Barna; Hegedűs, Tibor; Csizmadia, Szilárd; Kovács, Tamás; Kóspál, Ágnes; Pál, András; Könyves, Vera; Moór, Attila: "New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems" *Information Bulletin on Variable Stars*, **5313**, 1. (2002)
3. Borkovits, T.; Érdi, B.; Forgács-Dajka, E.; Kovács, T.: "On the detectability of long period perturbations in close hierarchical triple stellar systems" *Astronomy and Astrophysics*, v.**398**, p.1091-1102 (2003)
4. Bíró, Imre Barna; Borkovits, Tamás; Csizmadia, Szilárd; Hegedűs, Tibor; Klagyivik, Péter; Kiss, Zoltán Tamás; Kovács, Tamás; Lampens, Patricia; Patkós, Laszló; Pál, András; "New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems and of Maximum of SXPHE Type Stars" *Information Bulletin on Variable Stars*, **5684**, 1. (2006)
5. Bíró, I. B.; Borkovits, T.; Hegedűs, T.; Kiss, Z. T.; Kovács, T.; Lampens, P.; Regály, Zs.; Robertson, C. W.; van Cauteren, P. "New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems" *Information Bulletin on Variable Stars*, **5753**, 1. (2007)
6. Kovács, T.; Érdi, B.: "The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem" *Astronomische Nachrichten*, **328**, No. 8, 801-804. (2007)
7. Kovács, T.; Érdi, B.: "Transient chaos in the Sitnikov problem" *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, under publishing

## Konferencia kiadványban megjelent cikkek

8. Kovács, T.: "On the stability of exoplanets in binary systems" *In: Proceedings of the 3rd Workshop of Young Researchers in Astronomy & Astrophysics; Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University (PADEU)*, Edited by E. Forgács-Dajka, K. Petrovay and R. Erdélyi, 2004, Vol. **14**. p.293-300
9. Kovács, T.: "The 1:2 resonance in the Sitnikov problem" *In: Proceedings of the 4th Workshop of Young Researchers in Astronomy & Astrophysics; Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University (PADEU)*, Edited by E. Forgács-Dajka, 2006, Vol. **17**. on-line version
10. Kovács, T.: "Chaos in simple dynamical systems" *In: Proceedings of the 4th Austrian Hungarian Workshop for Young Researchers On Celestial Mechanics Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University (PADEU)*, Edited by Á., Süli, F. Freistetter and A. Pál, 2006, Vol. **18**. p.165-173

## Szakmai fordítások

11. May, Brain; Moore, Patrick; Lintott, Chris: „BUMM! A világegyetem teljes története”, Kossuth Kiadó (2007) 106 – 188. oldal

## Nem publikált munkák

12. „Bolygórendszerek stabilitásának vizsgálata”, Diplomamunka, Budapest (2003)
13. „Földközeli kisbolygók stabilitása”, TDK Dolgozat (2003)

## Szakmai előadások

14. "Transient chaos in dynamical astronomy", Institute for Astronomy, Univ. of Vienna, Bécs, Ausztria, 2007. január 25.
14. "Transient chaos in the Sitnikov problem", Max Planck Institute - Physics for Complex Systems Drezda, Németország, 2008. október 6.